

EEN HANDELINGSPSYCHOLOGISCHE INTRODUCTIE VAN HET OPPERVLAKTEBEGRIP

S.P. van 't Riet*

1. Inleiding

In een eerder artikel bespraken we het belang van wiskundeonderwijs op basis van materiële handelingen.¹ Aan de hand van de omtrek van een cirkel, geïntroduceerd met behulp van een autootje voorzien van wielen met verschillende diameter, lieten we zien welke betekenis het manipuleren met levensechte materialen kan hebben voor het wiskundeonderwijs, met name ten behoeve van de zwakkere leerling. Tevens gaven we een zestal aspecten aan van wiskundeonderwijs op materiële basis: het leerpsychologische aspect, motivatie, het didactische aspect, differentiatie, curriculumontwikkeling en toetsing. Aan één van die aspecten, het leerpsychologische, wil ik in dit artikel een verkenning wijden. Om het verhaal zo concreet mogelijk te maken, beperk ik mij daarbij tot de introductie van het oppervlaktebegrip. Na een korte beschouwing over oppervlakte als maatbegrip en het psychologisch onderzoek naar de ontwikkeling van het oppervlaktebegrip worden twee methoden van introductie van het oppervlaktebegrip met elkaar vergeleken. De eerste is die welke onder leiding van Freudenthal is uitgewerkt door Wiskobas. De tweede is een methode die door het werk van Gal'perin en zijn medewerkers is geïnspireerd. Suggesties voor nader onderzoek sluiten dit artikel af.

2. Wat is oppervlakte?²

'Oppervlakte' zou men kunnen omschrijven als 'hoeveelheid vlak'.³ Het begrip behoort samen met begrippen als 'lengte', 'inhoud', 'gewicht' en dergelijke tot de zogenaamde maatbegrippen, ook wel aangeduid met het woord 'metriek'.

* S.P. van 't Riet (geboren 1948) studeerde wiskunde en psychologie aan de Vrije Universiteit te Amsterdam. Gedurende vijf jaar was hij leraar wiskunde in het voortgezet onderwijs. Vervolgens twee jaar docent didactiek van de wiskunde aan de Technische Hogeschool te Delft. Vanaf 1980 is hij als hoofddocent wiskunde verbonden aan de Christelijke Lerarenopleiding Zwolle, nu Chr. Hogeschool Windesheim. Daarnaast participeert hij als onderzoeker in het onderzoeksprogramma 'Didactische differentiatie' van de eerstegraads lerarenopleiding van de Vrije Universiteit te Amsterdam.

Samen met lengte en inhoud behoort het oppervlaktebegrip tot de leerplannen van lbo, mavo, havo 2 en 3, vwo 2, 3 en 4.⁴ Lengte en oppervlakte hebben boven de andere maatbegrippen het voordeel dat zij in het algemeen direct zichtbaar zijn. Lengte en inhoud domineren samen met oppervlakte de meeste wiskundecurricula op het gebied van de maatbegrippen. De wijze waarop het oppervlaktebegrip echter in vele schoolboeken wordt behandeld, getuigt weinig van een reële benadering van oppervlakte als maatbegrip. Vaak beperkt de behandeling zich tot 'mooie' figuren zoals rechthoeken, driehoeken en cirkels.⁵ Dat meten in feite het vergelijken van een grootte met een eenheid is, wordt meestal niet expliciet behandeld. De gebruikte eenheid is in het algemeen de vierkante eenheid (meestal alleen de vierkante centimeter) en de bepaling van de oppervlakte is vaak alleen maar een kwestie van het aantal vierkantjes tellen dat een rechthoek opvult, waarbij dan bovendien een mooi rond telresultaat ontstaat. Uit de oppervlakte van de rechthoek en de bijbehorende formule worden dan vervolgens de oppervlakten van driehoeken en cirkels afgeleid.

Op deze wijze wordt het hele maatbegrip, dat met name in de toegepaste wiskunde van zo grote betekenis is, tot een karikatuur. Maat en meten worden een kwestie van simpel tellen met een eenduidige uitkomst. Precisie en exactheid gaan het oppervlaktebegrip dat leerlingen opbouwen, overheersen. Het werken met oppervlakteformules versterkt dan bovendien de gedachte, dat de oppervlakte altijd een nauwkeurig te berekenen getal is. De leerlingen krijgen op deze manier geen werkelijk inzicht in wat oppervlakte in feite is, laat staan dat zij iets leren over het maatbegrip in het algemeen. Schattingen, benaderingen, fouten, onder- en bovengrenzen van metingen, foutvoortplanting en dergelijke, allemaal zaken waar men in de werkelijkheid van alledag voortdurend mee te maken heeft, dat alles ontbreekt in vele wiskundeprogramma's. Hoe het maatbegrip zich historisch ontwikkelde uit het vergelijken van grootte, waarde en prijs, de idee van de replicatie van een eenheid en de problemen die daarbij kunnen ontstaan, het werken met onder- en bovengrenzen, de noodzaak het verschil tussen beide te verkleinen, de methoden die daartoe kunnen worden gebruikt, het verfijnen van verdelingen en het werken met eenheden van verschillende grootte, daarvan krijgen leerlingen vaak geen flauwe notie. Ook het nieuwe wiskundeprogramma van 1968 heeft in dit opzicht weinig verbetering gebracht.

Eén van de oorzaken voor deze schrale behandeling van het maatbegrip met name in het voortgezet wiskundeonderwijs is ongetwijfeld de nog steeds nawerkende invloed van de deductief-theoretische benadering in het traditionele wiskundeonderwijs, zoals dat zich in de eerste helft van deze eeuw ontwikkeld heeft. Gepaard daaraan was het bedrijven van wiskunde iets dat je deed met je neus in een boek, een pen in je hand en een stuk papier voor je op tafel. Het enige praktische handwerk dat gedoogd werd, was het maken van een nette constructietekening. Maar zelfs die materiële handeling was geheel uit de sfeer van het maatbegrip gehaald: aansluitend bij de postulaten van Euclides moest het afpassen van gelijke

lijnstukken altijd met de passer. De liniaal was daarbij verboden, want niet exact. Maar men vergat, dat men bij het instellen van en afpassen met de passer in feite ook een meethandeling verrichtte met alle onnauwkeurigheid van dien! Dat dit slecht begrepen handwerk met de vernieuwing uit het wiskundeonderwijs verdween, is toe te juichen omdat het quasi-exact was, maar tegelijkertijd is het te betreuren omdat het handwerk was. Ons inziens is de belangrijkste reden waarom men in het huidige voortgezet wiskundeonderwijs het oppervlaktebegrip niet werkelijk als maatbegrip *kan* behandelen gelegen in het feit dat dat wiskundeonderwijs in het algemeen zo a-materieel van karakter is.

3. Oppervlakte als psychologisch begrip ⁶

De bestudering van het begrip 'oppervlakte', en meer in het algemeen van het begrip 'maat'⁷, vanuit een psychologisch gezichtspunt is vooral verricht door Piaget en zijn medewerkers. Zij onderscheiden twee fundamentele cognitieve operaties waarop het maatbegrip berust: conservatie en transitiviteit. Een leerling beschikt over *conservatie* van oppervlakte, als hij inziet dat de oppervlakte van een figuur niet verandert als die figuur wordt verschoven, gewenteld of zelfs in stukken geknipt. Conservatie is dus in het algemeen het inzicht dat bepaalde cruciale aspecten van de situatie invariant zijn bij bepaalde handelingen. Of een leerling over conservatie beschikt, kan men gemakkelijk controleren door hem vragen te stellen over de oppervlakte van figuren, die men verplaatst of verknipt en in een andere vorm weer aan elkaar plakt.

Een leerling beschikt met betrekking tot oppervlakte over de operatie van *transitiviteit*, als hij in staat is vast te stellen dat de oppervlakten van twee figuren, ook als deze een verschillende vorm hebben, even groot zijn indien zij beide gelijk zijn aan de oppervlakte van een derde figuur. Het zinvolle gebruik van een meetinstrument berust op het idee van de transitiviteit. Transitiviteit is echter een exact, geïdealiseerd begrip en houdt geen rekening met het benaderingskarakter van metingen. Of een leerling over transitiviteit beschikt, kan men controleren door bijvoorbeeld de gelijkheid van de oppervlakte van twee verschillende driehoeken te laten bepalen door middel van de wederzijdse gelijkheid aan de oppervlakte van een rechthoek.

Het onderzoek naar de ontwikkeling van het maatbegrip bij kinderen van de vroegste leeftijd tot de pubertijd komt voort uit de studies van Piaget en zijn medewerkers en is vooral gericht op ruimtelijke maatbegrippen zoals lengte. Er worden op grond van dit onderzoek de volgende fasen in de ontwikkeling van het maatbegrip bij kinderen onderscheiden:

- *Fase 1:* Dit is het beginstadium in de kleuterleeftijd. Er is nog geen conservatie aanwezig. Kinderen op deze leeftijd gaan bij het beantwoorden van de vraag naar

de grootste oppervlakte of inhoud vooral af op de grootste lineaire dimensie van de figuur of het voorwerp. Het kind laat zich voornamelijk leiden door zijn visuele indrukken.

- *Fase 2:* Het stadium waarin conservatie en transitiviteit zich beginnen te ontwikkelen tussen het zesde en het achtste levensjaar. Het kind begint dan bijvoorbeeld te meten met behulp van een maatstok. In deze fase ontstaat ook de denkoperatie van de conservatie van materie en gaat het kind het leuk vinden oppervlakten te meten. In het algemeen moeten in deze fase de als maat gebruikte voorwerpen nog het hele op te meten voorwerp overdekken.
- *Fase 3:* Het stadium waarin het idee van een kleinere eenheid ontstaat. Dit gebeurt volgens Piaget op acht- tot tienjarige leeftijd. Meten vindt plaats door middel van het bedekken van voorwerpen met behulp van een kleinere eenheid. Nu kan er ook gerekend worden met de meetresultaten.
- *Fase 4:* Het eindstadium bij de leeftijd van elf tot twaalf jaar. Het is het stadium van Piagets formele operaties. Nu is het kind in staat oppervlakte en inhoud te beschouwen met behulp van berekeningen die gebaseerd zijn op lineaire dimensies. Volgens Piaget is het karakteristieke van dit stadium het bewustzijn van de ruimte als een continuüm van oneindig veel punten. Dit bewustzijn zou pas kunnen optreden als de begrippen 'oneindigheid' en 'continuïteit' zijn ontwikkeld, een opvatting die echter door anderen bestreden wordt.⁸

De theorie van Piaget is echter in de eerste plaats een ontwikkelingstheorie en geen leertheorie. Zij levert volgens sommigen geen directe aanwijzingen ten aanzien van de vraag hoe men het onderwijs zou moeten inrichten.⁹ Men zou er een argument in kunnen vinden om vanaf het elfde à twaalfde jaar kinderen wiskunde op een formele manier te onderwijzen. Het onderbouwen van het maatbegrip door middel van concrete meethandelingen zou dan niet direct meer nodig zijn. En inderdaad lijkt het huidige wiskundeonderwijs zich in dit opzicht aan de theorie van Piaget te conformeren.

Er is echter op de theorie van Piaget veel afgedongen. Replikatie van zijn experimenten blijkt niet altijd tot dezelfde resultaten te leiden. De hierboven gegeven indeling van de ontwikkeling van het maatbegrip in fasen is niet onweersproken gebleven. Enerzijds is het niet uitzonderlijk als jongere kinderen blijken te functioneren volgens de specificaties van een latere fase dan die waartoe zij op grond van hun leeftijd gerekend moeten worden. Anderzijds heeft onderzoek in Groot-Brittannië en de Verenigde Staten uitgewezen, dat het eindstadium van de formele operaties door veel leerlingen op veel latere leeftijd wordt bereikt.

De meeste 13- tot 17-jarigen in de VS kunnen bijvoorbeeld wel overweg met lengtemeting, maar oppervlakte- en inhoudsmeting worden niet echt beheerst. Formules worden vaak machinaal toegepast.¹⁰

Ook van de kant van de Russische leerpsychologie is het werk van Piaget onder kritiek komen te staan. De experimenten van Gal'perin en zijn medewerkers tonen

aan dat men door een bepaalde vorm van onderwijs de ontwikkeling van het getalbegrip bij kinderen op de basisschoolleeftijd sterk kan beïnvloeden door gebruik te maken van het maatbegrip. Doorslaggevend hierbij is het verrichten van de juiste materiële handelingen op basis waarvan de beoogde cognitieve operaties gevormd worden.¹¹ Ook de zogenaamde Piaget-fenomenen, door Piaget verklaard met behulp van de fase van cognitieve ontwikkeling waarin kinderen zich al of nog niet bevinden, blijken in Gal'perins experimenten te verdwijnen onder invloed van de door hem gevolgde onderwijsmethode.¹²

Voor een uitgebreide bespreking van Gal'perins aanpak is het hier niet de plaats. De literatuur over de theorie van Gal'perin is tamelijk goed toegankelijk.¹³ Wel merken we op dat zijn theorie van de trapsgewijze vorming van begrippen, waarin ook het materiële niveau zo'n belangrijke rol speelt, een sterk beroep doet op docenten, vakdidactici en onderzoekers de mogelijkheden van het leren van wiskunde op materieel niveau nader te doordenken en te onderzoeken. Het feit dat Gal'perins onderzoek zich voornamelijk beperkt tot kinderen op de basisschoolleeftijd, doet hieraan niet af. Dat leren op materieel niveau ook in het voortgezet onderwijs van grote betekenis zou kunnen zijn, laat zich daarbij op de volgende wijze uit het voorgaande afleiden. Als veel leerlingen bij de huidige vorm van onderwijs pas op een hogere leeftijd Piagets stadium van de formele operaties met betrekking tot een begrip als oppervlakte bereiken (niet bij elf tot twaalf jaar, maar bij dertien tot zeventien jaar), dan mag men ook verwachten dat het leren van een dergelijk begrip op materieel niveau zinvol kan zijn op een hogere leeftijd dan die waarbij Gal'perin zijn experimenten gedaan heeft (dus niet alleen bij zes tot zeven jaar). Overigens merken we op dat ook Gal'perins opvattingen zelfs binnen de Russische leerpsychologie niet onweersproken zijn gebleven. Het zou echter te ver voeren daarop in te gaan in het kader van dit artikel.

Een aanpak van het onderwijzen van het oppervlaktebegrip waarbij materiële handelingen een belangrijke rol spelen, vinden we in het Wiskobas-materiaal. In de volgende paragraaf zal ik daaraan een korte bespreking wijden in het licht van het voorgaande. Na enkele kritische aantekeningen gemaakt te hebben bij het fenomenologische karakter van het Wiskobas-materiaal, wordt in paragraaf 5 vervolgens een schets gegeven van een mogelijke handelingspsychologische introductie van het oppervlaktebegrip als maatbegrip op een door het werk van Gal'perin geïnspireerde manier. Tenslotte volgt een korte discussie over mogelijke voor- en nadelen van beide methoden.

4. Oppervlakte leren met Wiskobas

Belangrijk en vernieuwend werk met betrekking tot het aanvangsonderwijs rondom het oppervlaktebegrip is verricht in het kader van het Wiskobas-project van het voormalige IOWO. De resultaten daarvan zijn neergelegd in twee

leerplanpublicaties (nr. 7 en 9) bestaande uit werkblokken voor het basisonderwijs en bijbehorende handleidingen voor docenten.¹⁴ Het eerste deel (nr. 7) heeft een systematische opbouw, waar het oppervlaktebegrip in de verschillende fasen van zijn ontwikkeling aan de orde komt.

Het tweede deel (nr. 9) biedt vooral projectachtige leerstof rondom het oppervlaktebegrip. Het totale materiaal, dat rijk van inhoud en overvloedig van omvang is, heeft niet de vorm van een gebruikelijke leergang die van a tot z kan of moet worden doorgewerkt, maar wordt omschreven als een bronnenboek met werkwijzer. Docenten zullen zelf keuzen moeten maken bij hun onderwijs over oppervlakte en kunnen aan het onderwerp naar eigen inzicht meer of minder aandacht en tijd besteden. Het materiaal bevat bovendien niet alleen leerstof over oppervlakte als begrip uit het leerstofdomein meten, maar benadert het oppervlaktebegrip tevens in de bredere contexten van de leerstofdomeinen meetkunde, relaties en functies, taal en logica, statistiek en waarschijnlijkheid, en rekenen.

Het Wiskobas-materiaal over oppervlakte is gebaseerd op een zogenaamde meetlijn, die werd ontwikkeld door Freudenthal.¹⁵ Deze meetlijn is niets anders dan een aantal opvolgende fasen die doorlopen moeten worden bij het aanleren van maatbegrippen (hier toegepast op oppervlakte):

- Vergelijken (van verschillende oppervlakken).
- Ordenen (van oppervlakken naar grootte).
- Samenstellen (van oppervlakken).
- Natuurlijke maat (om oppervlakken te meten).
- Standaardmaat.
- Toepassen.

Freudenthals analyse van het maatbegrip sluit aan bij die van Piaget. Hij onderscheidt vier fundamentele kwaliteiten aan het maatbegrip¹⁶:

- a. Equivalentie (gelijke oppervlakken hebben gelijke oppervlakte).
- b. Orde (een groter oppervlak heeft een grotere oppervlakte).
- c. Optelling (de oppervlakte van een samengesteld oppervlak is gelijk aan de oppervlakte van haar delen).
- d. Onbepaalde deelbaarheid (een oppervlak kan in een willekeurig aantal van n gelijke delen verdeeld worden waarvan de oppervlakten gelijk zijn aan $1/n$ maal de oorspronkelijke oppervlakte).

De eerste van deze kwaliteiten vertoont duidelijke overeenkomst met Piagets begrippen 'conservatie' en 'transitiviteit'. Opmerkelijk is dat de opbouw van het Wiskobas-materiaal in het eerste deel (Leerplanpublicatie nummer 7) sterke verwantschap vertoont met de theorie van Piaget. Een vergelijking met de

ontwikkelingsfasen van Piaget die we in paragraaf 3 bespraken, kan dat verduidelijken. Het materiaal van dit leerplandeel bestaat uit drie delen:

- *Deel 1* is bestemd voor de onder- en middenbouw van de basisschool en komt qua leeftijd dus overeen met Piagets tweede fase.
- *Deel 2* is voor de midden- en bovenbouw en komt qua leeftijd overeen met Piagets fase 3.
- *Deel 3* is voor de bovenbouw van de basisschool en de brugklas van het voortgezet onderwijs bedoeld, wat overeenkomt met de leeftijden van Piagets fase 4.

De verwantschap beperkt zich echter niet tot de opbouw in fasen naar leeftijd. Ook inhoudelijk komen de drie delen sterk overeen met de drie overeenkomstige fasen van Piaget¹⁷:

- Deel 1 begint na enige intuïtieve onderzoekjes met een hoofdstuk 'vergelijken'. Hierin worden oppervlakken vergeleken naar grootte. Aandacht moet met name besteed worden aan het feit dat leerlingen daarbij vaak afgaan op de lineaire dimensies. We vinden hier dus aan het begin van de 'leergang' de aansluiting bij Piagets eerste fase van de kleuterleeftijd, waarin dit verschijnsel karakteristiek heet te zijn voor het gedrag van het kind.
- Het volgende hoofdstuk heet 'omvormen'. Het gaat daarbij vooral om de verwerving van het besef, dat de oppervlakte van een figuur na verknippen en hergroeperen van de delen niet verandert. Duidelijk herkent men hierin de aansluiting bij de ontwikkeling van conservatie en transitiviteit, die kenmerkend is voor Piagets tweede fase.
- Daarna volgt een hoofdstuk 'maat toekennen', waarin het gaat om toekennen van een getal als maat voor de oppervlakte van een vlakke figuur. Daartoe wordt eerst het rooster geïntroduceerd als 'maatmiddel'. Ook deze activiteit van het beginnen meten is kenmerkend voor Piagets tweede fase. De in de werkbladen gebruikte roosters overdekken (omsluiten) daarbij de te meten figuren geheel.
- In deel 2, dat uit slechts één hoofdstuk bestaat, gaat het vooral om het herhalen en uitbouwen van de in deel 1 behandelde stof. De wijze waarop dit gebeurt, heeft trekken van de karakteristieken van Piagets derde fase. Het idee van de kleinere (en grotere) eenheid wordt gestimuleerd door de zeer variërende afmetingen van de in de werkbladen gebruikte roosters. Eén van de activiteiten die dit idee verder ondersteunen, is het vermenigvuldigen van figuren, waarbij - omdat zij zijn afgebeeld in roosters - ook de eenheden groter of kleiner worden. Ook het rekenen met de meetresultaten begint in dit hoofdstuk een belangrijke plaats in te nemen, hetgeen eveneens een kenmerk is van de derde fase van Piaget.
- Deel 3 begint met een hoofdstuk 'rooster verfijnen'. Het gaat daarbij onder andere om de bewustmaking dat het meten met fijnere maten een verhoging van de nauwkeurigheid oplevert. Meer expliciet dan voorheen wordt hier dus de

kleinere eenheid aan de orde gesteld, waarvan het idee zich reeds in Piagets derde fase ontwikkelt.

- Na een aantal hoofdstukken met een bredere meetkundige inhoud komt tenslotte de oppervlakteformule van de rechthoek aan de orde en vervolgens die van het parallellogram en de driehoek. We herkennen hier de vierde ontwikkelingsfase van Piaget, waarin het kind in staat is oppervlakte te berekenen met behulp van lineaire dimensies.

In het kader van dit artikel is het nu voorts van belang een opmerking te maken over de materiële kant van het leren met behulp van het onderhavige Wiskobas-materiaal. Daarbij moet dan allereerst gesteld worden dat het werken met materialen en het verrichten van materiële handelingen een grote rol speelt of kan spelen bij het uitvoeren van de opdrachten met behulp van de werkbladen. De aard van de materialen en van de te verrichten handelingen wordt echter sterk bepaald door het fenomenologische karakter van de leerstof. Dat wil zeggen dat de mentale fenomenen het uitgangspunt vormen bij het leren van het oppervlaktebegrip. De daarbij te verrichten materiële handelingen hebben eerder een ondersteunend dan een funderend karakter. De werkbladen bijvoorbeeld bevatten een overvloed aan figuren, contouren en oppervlakken van allerlei vorm, die als materialisering van bepaalde mentale voorstellingen de aanschouwing van kinderen moeten stimuleren en vormen. De bijbehorende handelingen bestaan met name uit het uitknippen van oppervlakken, het hergroeperen van de delen, het overdekken van figuren of het tekenen van allerlei vormen. Veelvuldig zijn de manipulaties die materieel of gematerialiseerd moeten worden uitgevoerd met meetkundige figuren. Ook de gebruikte maateenheden, voornamelijk roostervierkantjes, hebben een sterk fenomenologisch karakter. Meten is vooral hokjes tellen binnen het grotere geheel van het roosterpapier, waarop de randen van het 'te meten' oppervlak zijn aangegeven. Echte meethandelingen in de zin van het manipuleren met reële voorwerpen die als maat dienen, komen in het lesmateriaal weinig aan de orde. Het is juist dit aspect van het leren van het oppervlaktebegrip als maatbegrip, dat in een aanpak volgens de ideeën van Gal'perin geheel anders wordt aangepakt. Om dat te illustreren zullen we daarvan in de volgende paragraaf een nadere uitwerking geven om vervolgens beide benaderingen te vergelijken.

5. Een handelingspsychologische introductie van het oppervlaktebegrip

De leergang die Gal'perin en Georgiëv ontwierpen om met behulp van het meten de ontwikkeling van het getalbegrip van kinderen op zes- tot zevenjarige leeftijd te bevorderen, kan gemakkelijk model staan voor een leergang ter introductie van het oppervlaktebegrip.¹⁸ Over de plaats in het wiskundeonderwijs waar onderstaande leergang het beste zou kunnen worden opgenomen, willen en kunnen we geen

definitieve uitspraken doen. Men zou kunnen denken aan het basisonderwijs, maar wellicht kan ook aan de eerste leerjaren van het voortgezet onderwijs en met name het lbo en mavo gedacht worden. Docenten zullen zelf met aan hun situatie aangepast lesmateriaal kunnen uitzoeken of onderstaande leergang voldoet en op welk moment en voor welke leerlingen deze geschikt is.¹⁹ Men zou dan als volgt te werk kunnen gaan.

De leergang bestaat uit vijf delen. *Het eerste deel* is een oriëntatie op het maatbegrip in het algemeen. Het begint ermee, datgene wat de leerlingen al weten over maat en meten 'op te frissen'. Allerlei verschillende vormen van meten kunnen worden besproken en eventueel getoond met behulp van audio-visueel materiaal. Het wegen van groente of vis, het afpassen van stukken stof op de markt, het meten van de lichaamstemperatuur, het schatten van de prijzen van artikelen, het bepalen van een hoeveelheid meel met behulp van een lepel of een kopje, het maken van een hoogste en een laagste schatting, het verschil tussen meten en schatten, de kennis van allerlei eenheden en dergelijke zaken meer kunnen de revue passeren. Aan het slot van deze oriëntatie wordt de aandacht gevestigd op het 'meten' van oppervlakte. Men zal er niet automatisch vanuit moeten gaan dat de leerlingen wel zullen snappen, dat oppervlaktebepaling ook een vorm van meting is. Met name in het voortgezet onderwijs zullen vele leerlingen oppervlaktebepaling ten gevolge van het voorgaand onderwijs uitsluitend als een activiteit van berekening kennen. Aan de overgang naar het verrichten van eigen oppervlaktemetingen zal dan ook veel aandacht moeten worden besteed.

In *het tweede deel* wordt een vast verband gelegd tussen de kwantitatieve beoordeling van oppervlakken en het afmeten met behulp van een maat. Onder een maat verstaan we in dit verband een vlak voorwerp van geschikte vorm en grootte, dat gebruikt kan worden om andere oppervlakken geheel of gedeeltelijk te bedekken (zie noot 5, betekenis 1). Hierbij moet worden voorkomen dat de leerlingen dit begrip 'maat' gaan vereenzelvigen met één bepaald voorwerp. De oppervlakte van allerlei vlakke voorwerpen en figuren wordt nu daadwerkelijk door de leerlingen gemeten met behulp van verschillende oppervlaktematen. Men kan allerlei vlakke voorwerpen met verschillende vormen nemen om er de oppervlakte van op te meten, zoals enveloppen, tafelbladen van schoolbanken, uitgevouwen krantepagina's, een bordgeodriehoek, ronde vloerkleden, de vloer van de gang, platgestreken T-shirts, of andere speciaal voor dit doel vervaardigde figuren van welk materiaal dan ook. Ook kan men de oppervlakte van de buitenkant van driedimensionale figuren zoals kasten, plantenbakken, enzovoort, laten meten. Alle oppervlakten zullen met oppervlaktematen van verschillende vormen en grootten gemeten moeten worden. Te denken valt aan voorwerpen zoals schoolschriften, geodriehoeken en lucifersdoosjes. Ook kan men gebruik maken van bepaalde L-vormige en zeshoekige voorwerpen, teneinde later de geschiktheid van de verschillende maten aan de orde te kunnen stellen. Eveneens worden samengestelde maten zoals twee geodriehoeken aan elkaar, drie aan elkaar geplakte lucifersdoosjes of iets dergelijks

als maat gebruikt om te voorkomen dat de leerlingen het begrip 'maat' gaan beperken tot enkelvoudige voorwerpen. Men kan de grotere voorwerpen die als maat dienen, laten opmeten met behulp van de kleinere maten om te laten zien dat men de oppervlakte van de ene maat kan uitdrukken in die van de andere. In eerste instantie is het van belang te komen tot een globale bepaling van oppervlakten met behulp van de maten. Nauwkeurige benaderingen zijn in deze fase nog niet aan de orde. De resultaten worden verzameld in een tweedimensionale tabel waarbij elke oppervlakte wordt uitgedrukt in elke geschikte maateenheid. Men kan hierbij werken met geschatte waarden of met onder- en bovengrenzen. Het is niet nodig dat elke leerling elk oppervlak meet met elke maat. Men kan het werk verdelen. Wel is belangrijk dat alle leerlingen in voldoende mate ervaring opdoen met alle aspecten van het meten van oppervlakken die in dit deel van de leergang aan de orde zijn.

Naar aanleiding van de opgestelde tabel wordt nu een klasgesprek gevoerd over de ervaringen die de leerlingen hebben opgedaan bij het meten. De leraar dient er zorg voor te dragen dat allerlei aspecten aan de orde komen, zoals het benaderingskarakter van de metingen, de geschiktheid of ongeschiktheid van de voorwerpen om als maat te dienen zowel qua vorm als qua grootte, de mogelijkheid de grootten van oppervlakken met elkaar te vergelijken op grond van de meetresultaten, enzovoort. Het is van belang de resultaten van dit klasgesprek weer te geven in goed geformuleerde samenvattingen, die later door de leerlingen gebruikt kunnen worden om zich de opgedane ervaringen snel weer te herinneren. Het klasgesprek zal er nu vervolgens op moeten uitlopen een selectie uit de maten te maken. Deze selectie moet een instrumentarium opleveren om het oppervlaktebegrip nader te onderzoeken. Men kan bijvoorbeeld besluiten met een drietal rechthoekige en/of vierkante voorwerpen van verschillende afmetingen verder te gaan, bijvoorbeeld een uitgevouwen krantepagina, een schoolschrift en een lucifersdoosje.

In *het derde deel* wordt dan het begrip 'eenheid van oppervlakte' ingevoerd, als die oppervlakte die gelijk is aan die van de maat. Niet de maat is dus de eenheid, maar elk oppervlak dat precies door de maat bedekt wordt, heeft de oppervlakte van de eenheid. Belangrijk is het inzicht dat eenheid een relatief begrip is: elke eenheid is altijd een *maateenheid*, dat wil zeggen is altijd verbonden met één of andere maat. Bij een grotere maat behoort een grotere eenheid. Is het begrip eenheid aldus geïntroduceerd, dan komt het er vervolgens op aan nauwkeurig met de verschillende eenheden te leren werken. Bij het bepalen van oppervlakten die niet gelijk zijn aan een geheel aantal malen de eenheid moet nu allereerst weer worden teruggегреpen op de begrippen boven- en ondergrens. Na bepaling daarvan ontstaat de vraag naar grotere nauwkeurigheid. Men kan de leerlingen nu twee benaderingen laten uitvoeren: de maat wordt verdeeld in halven, kwarten, tienden, enzovoort, om de nauwkeurigheid van de meting te vergroten, of er wordt overgeschakeld op een kleinere maat om het 'gat' tussen onder- en bovengrens te dichten. De oppervlakte van een tafel wordt bijvoorbeeld uitgedrukt in 4,4 eenheden

krantepagina, of in 3 eenheden krantepagina plus 9 eenheden schoolschrift plus 14 eenheden lucifersdoosje. Van belang is dat de leerlingen de meethandelingen weer zelf verrichten en dat de leraar de werkwijze en het resultaat na afloop met ze bespreekt en helder samenvat.

Het werken met verschillende eenheden doet nu verder de vraag rijzen naar de onderlinge relatie tussen die eenheden en de met hen verkregen meetresultaten. In het middelpunt van *het vierde deel* van onze leergang staat dan ook de abstracte functionele betrekking tussen een oppervlakte, de maat en het getal dat het meetresultaat vormt. Hier komen vragen aan de orde zoals: Hoe verandert het meetresultaat als de oppervlakte hetzelfde blijft, maar de maat groter wordt? Hoe moet de maat veranderen wil het meetresultaat hetzelfde blijven als de oppervlakte kleiner wordt? De bij de maten behorende eenheden kunnen nu in elkaar worden uitgedrukt. Er wordt een omrekeningstabel opgesteld, die langs verschillende wegen gecontroleerd kan worden. De relatie tussen het meetresultaat en de maateenheid, en de betrekking van beide tot de te meten oppervlakte kan in tal van oefeningen worden uitgewerkt.

In *het vijfde deel* tenslotte kan de overgang gemaakt worden naar de gangbare oppervlakte-eenheden, zoals de vierkante centimeter, decimeter en meter. De introductie daarvan kan gedaan worden aan de hand van reeds bestaande kennis over deze oppervlakte-eenheden. Men kan de hierboven gebruikte eenheden in de nieuwe uitdrukken en omgekeerd. Verschillende soorten ruitjes- en millimeterpapier kunnen in deze fase van het onderwijs goede diensten bewijzen. Het verdient aanbeveling het gebruik van lineaire dimensies en oppervlakteformules voorlopig te vermijden, daar deze gepaard gaan met specifieke leerproblemen.²⁰

Tot zover de invoering van het oppervlaktebegrip als maatbegrip op een door Gal'perins experimenten geïnspireerde wijze. Aansluitend willen we nog de volgende opmerkingen maken. Sommige docenten zullen bij het lezen van het bovenstaande wellicht de neiging hebben te denken: "O, dat kan ik mijn leerlingen net zo goed even vertellen, dan weten ze het ook." Het is dan echter de vraag, *wat* de leerlingen weten. Kennis opgedaan door middel van materiële handelingen is van een geheel andere aard dan kennis die verkregen wordt door middel van verbale mededelingen of eventueel verbale interactie. Door de handelingen van het oppervlakte-meten te verrichten stuiten de leerlingen zelf op de problemen van nauwkeurigheid, onder- en bovengrenzen, schattingen in plaats van exacte metingen, enzovoort. Ook zijn zij actiever betrokken bij het vinden van oplossingen voor de problemen die zich voordoen. Daarbij zijn de materiële handelingen gemakkelijk herhaalbaar en kunnen de materialen, mits zij goed gekozen zijn, denkfouten van de leerlingen corrigeren. Ook kunnen leerlingen gemakkelijker verbanden leggen met eerdere ervaringen en bestaande kennis, waardoor het kennisnetwerk dat de leerling opbouwt rijker, steviger en zinnvoller wordt.

Wil dit echter het geval zijn, dan zal het leerproces zich niet tot de materiële handelingen moeten beperken. Er zal aandacht aan besteed moeten worden, dat

tijdens het leerproces ook het verbale en het concreet-mentale kennisniveau²¹ worden ingeschakeld met betrekking tot de te leren begrippen en handelingen. De materiële handelingen zullen moeten worden omgezet in mentale handelingen. Dan pas ontstaat er een netwerk van kennis op basis waarvan de leerling vooruitgang in zijn denken kan boeken. Dit kan bereikt worden door regelmatig met de leerlingen te verbaliseren wat zij doen en in de loop van het leerproces steeds meer vragen te stellen die op mentaal niveau zijn op te lossen, hetgeen echter nimmer ten koste mag gaan van de kwaliteit van het materiële handelen van de leerlingen. Een leerproces aldus opgezet kan wellicht heel wat slecht begrepen en moeilijk onthouden boekenwiskunde voorkomen.

6. Fenomenologisch versus handelingspsychologisch georiënteerd onderwijs

Vergelijking van de wijze waarop het begrip oppervlakte wordt ingevoerd volgens Wiskobas en volgens de in de vorige paragraaf geschetste, door het werk van Gal'perin geïnspireerde methode laat een aantal duidelijke verschillen zien. We hebben de eerste methode 'fenomenologisch' genoemd (zie par. 4). De tweede methode zullen we 'handelingspsychologisch' noemen. Hiermee willen we niet suggereren dat materiële handelingen in de Wiskobas-methode geen rol zouden spelen (zie wederom par. 4) en evenmin dat fenomenen in de methode à la Gal'perin geen betekenis zouden hebben. Waar het om gaat, is *wat* men in de leeractiviteit van de leerling beschouwt als de basis voor de begripsvorming. Ligt het psychologische fundament van een begrip primair in de *mentale fenomenen* en zijn materiële handelingen alleen instrumenten om deze fenomenen te helpen creëren en transformeren, of ligt het fundament van de begrippen in de *materiële handelingen* en kunnen mentale fenomenen pas dan volledig tot ontwikkeling komen als zij van dergelijke handelingen de verinnerlijking zijn? Dat deze verschillende theoretische uitgangspunten, al of niet bewust gehanteerd door leerstofontwikkelaars, tot essentieel verschillende aanpakken van onderwijs kunnen leiden, zal ik in het volgende trachten duidelijk te maken.

Het meest opvallende verschil tussen de methode Wiskobas en de handelingspsychologische methode van paragraaf 5 is gelegen in de rol die van meet af aan meten en het gebruik van maten in beide spelen. In de methode Wiskobas spelen maten aanvankelijk geen rol. In de fasen 'vergelijken' en 'omvormen' gaat het er vooral om dat kinderen een voorstelling van oppervlakken opbouwen, waarvan orde en equivalentie twee hoekstenen zijn. De gebruikte hulpmiddelen zijn sterk visueel van aard en te beschouwen als materialisering van door de leerstofontwikkelaars bedachte oppervlakken. Als in de fase 'maat toekennen' er een maat geïntroduceerd wordt, heeft deze maat wederom een sterk fenomenologisch karakter: direct wordt gewerkt met de maat van het roostervierkantje als onderdeel van een totaal rooster. De gebruikte maat is dus niet een reëel materieel voorwerp, maar

een gematerialiseerde voorstelling welke ingebed is in het grotere geheel van een omvattende mentale structuur. De op te meten oppervlakken zijn in de roosters afgebeelde figuren.

Geheel anders is de aanpak van de handelingspsychologische methode, welke vanaf het begin de aandacht van de leerling richt op het gebruik van reële maten, eerst in de oriënteringsfase met een beroep op de herinnering, daarna in de uitvoerende fasen door middel van materiële handelingen. Materiële voorwerpen van allerlei vorm worden als oppervlaktematen gebruikt om er reële meethandelingen mee te verrichten. Zoveel mogelijk wordt gebruik gemaakt van reële, voorhanden zijnde oppervlakken, waardoor het nauwelijks nodig is met afbeeldingen van oppervlakken te werken. Het meten heeft niet het karakter van hokjes tellen, maar van een werkelijke meethandeling door het te meten oppervlak met de maten te bedekken.²² De aspecten orde en equivalentie gaan hierbij niet aan het meten vooraf, maar kunnen op basis van de meethandelingen en meetresultaten aan de orde worden gesteld.

Aan de tegenstelling tussen beide aanpakken ligt een fundamenteel verschil van inzicht ten grondslag met betrekking tot het leren en onderwijzen van grootheden. In de beschouwing welke de Wiskobas-leerplanpublicaties over oppervlakte afsluit, zet Freudenthal de uitgangspunten van de Wiskobas-aanpak uiteen. Naar zijn opvatting gaat het vergelijken als meer fundamentele werkzaamheid aan het meten vooraf.²³ Daarvoor zijn twee relaties nodig: equivalentie en orde (zie ook par. 4). Bovendien moet je, voor je aan het meten toe bent, weten hoe je maatstaven aan elkaar zet. Er is dus een operatie optelling of samenvoeging nodig, welke nog niet numeriek hoeft te worden opgevat. Pas daarna kan er een maat gekozen worden. Ook Treffers verwoordt het Wiskobas-uitgangspunt met betrekking tot deze kwestie als alternatief voor het traditionele cijfermatige onderwijs over grootheden: "Het werken met grootheden is in beginsel onafhankelijk van de numerieke opvatting. We kunnen grootheden vergelijken, ordenen en samenstellen, zonder dat er een maateenheid ingevoerd is."²⁴

De benadering van Gal'perin in deze is precies omgekeerd. Hoewel mij niet bekend is of hij zich heeft beziggehouden met het leren van het oppervlaktebegrip, kan men zijn standpunt afleiden uit wat hij stelt ten aanzien van het leren van het getalbegrip bij jonge kinderen. Men moet, aldus Gal'perin, kinderen het getalbegrip *niet* bijbrengen door hun te leren groepen van reële objecten te benoemen met tel-woorden. Een kwantitatieve benadering van de ons omringende wereld is alleen mogelijk op basis van het onderkennen in objecten en verschijnselen van eigenschappen die kunnen worden opgevat als grootheden. Gal'perin leert de kinderen daarom eerst meten, voordat zij overgaan tot rekenen. Daarbij gaat het meten bij hem aan het vergelijken vooraf. Of liever: het vergelijken vindt plaats met behulp van de meethandelingen. Equivalentie en orde volgen dus op en ontstaan op basis van maat en meten.

Waar nu het Wiskobas-materiaal zozeer Piagetiaanse trekken vertoont (zie par. 4) en Gal'perins onderzoek Piagets theorie tot voorwerp van kritiek maakte (zie par. 3) betekent dit dat we de tegenstelling van de Wiskobas-methode en de handelingspsychologische methode ook met betrekking tot de zogenaamde Piaget-fenomenen kunnen doortrekken. Het Wiskobas-materiaal tracht de Piaget-fenomenen te bestrijden door aanvankelijk aan de verwerving van conservatie en transitiviteit te werken in de fase van het vergelijken en het omvormen. Het onderzoek van Gal'perins medewerkster Obuchova heeft echter laten zien dat de Piaget-verschijnselen pas echt verdwijnen door de invoering van concrete maten en het leren meten van grootheden aan objecten.²⁵ Dit doet vraagtekens rijzen bij de door Wiskobas gevolgde werkwijze, vraagtekens die nader onderzoek op dit terrein interessant en belangrijk zouden kunnen doen zijn.

7. Suggesties voor onderzoek

Op grond van bovenstaande beschouwing dienen zich nu ten minste twee vraagstellingen voor nader onderzoek aan. De eerste is of onderwijs over het oppervlaktebegrip op basis van materiële meethandelingen, zoals ik in paragraaf 5 geschetst heb, een reëel alternatief is voor de Wiskobas-aanpak met betrekking tot de invoering van het oppervlaktebegrip. Men zou de geschetste leergang kunnen uitwerken tot een afgerond geheel van leerstof en daarnaast uit het Wiskobas-materiaal een leergang samenstellen met een vergelijkbare omvang en inhoud. Nadat men met beide leergangen in twee gelijksoortige groepen leerlingen uit de onder- of middenbouw van de basisschool gewerkt heeft, zou men het leerresultaat van beide methoden op tal van aspecten kunnen vergelijken onder andere op het al of niet optreden van de Piaget-fenomenen.

Een andere vraagstelling komt voort uit de resultaten van het in paragraaf 3 vermelde onderzoek waaruit blijkt dat de meeste 13- tot 17-jarigen in de VS oppervlakte- en inhoudsmeting niet echt beheersen. In hoeverre is het mogelijk bij oudere leerlingen een onvolledig of zelfs onjuist begrip van oppervlakte te overwinnen en tot een goed begrip van oppervlakte te komen door hun onderwijs op basis van materiële meethandelingen aan te bieden? Met andere woorden: welke rol zou een handelingspsychologische aanpak kunnen spelen in de onderbouw van het voortgezet onderwijs? In het verlengde van deze laatste vraagstelling dient zich vervolgens nog een andere vraagstelling aan. Een alom gesignaleerd probleem in het huidige voortgezet onderwijs is het probleem van de interne differentiatie, voortkomend uit de tendens leerlingen langer bij elkaar te houden. Naar het oordeel van sommigen kan materialisering in het wiskundeonderwijs een belangrijke bijdrage leveren aan het oplossen van althans een deel van het differentiatieprobleem.²⁶ Men zou zich kunnen voorstellen dat sommige leerlingen meer hebben aan een fenomenologische aanpak op de wijze van Wiskobas en andere meer aan een

handelingspsychologische op de wijze van Gal'perin. Als onderwijs op basis van materiële handelingen bij jongere leerlingen goede resultaten afwerpt, dan mag men ook bij oudere leerlingen die zwak zijn in wiskunde, zekere verwachtingen koesteren met betrekking tot een dergelijk soort onderwijs. In het kader van het onderzoek naar het wiskundeonderwijs, en met name naar didactische differentiatie in het wiskundeonderwijs, zou de handelingspsychologische methode een belangrijke rol moeten gaan spelen.

Noten

1. Van 't Riet, Kroon & Van der Wal, 1987.
2. Veel van de inhoud van deze paragraaf is ontleend aan: Dickson, Brown & Gibson, 1984, p. 79 e.v.
3. Lovell, 1973, p. 107.
4. Vademecum voor de wiskundeleraar, 1986, p. 7 e.v.
5. Ook Lovells bespreking van de behandeling van oppervlakte in de klas beperkt zich grotendeels tot rechthoeken en driehoeken (Lovell, 1973, 109 e.v.).
6. Veel van de inhoud van deze paragraaf is ontleend aan: Dickson, Brown & Gibson, 1984, p. 83 e.v.
7. We wijzen erop dat in dit artikel het woord 'maat' overeenkomstig het Nederlandse spraakgebruik in verschillende betekenissen wordt gebruikt. Afgezien van de sfeer van de muziek kunnen er tenminste vijf betekenissen worden onderscheiden. 1) Maat als aanduiding voor voorwerpen waarmee gemeten wordt, dat wil zeggen, voorwerpen die men gebruikt om grootheden zoals lengte e.d. te meten. 2) In het verlengde daarvan wordt het woord 'maat' gebruikt als aanduiding voor met name ruimtelijke eenheden waarmee gemeten wordt bijvoorbeeld in de uitdrukking 'maten en gewichten'. 3) Maat komt ook voor als resultaat van een meting, het getal dat ontstaat uit de vergelijking van een grootheid met een eenheid. Men spreekt hier ook van 'afmeting'. 4) Het woord 'maat' heeft in sommige gevallen ook de betekenis van een soort fysische grootheid, dat wil zeggen een door middel van meting kwantificeerbaar kenmerk, en is dan vergelijkbaar met fysische grootheden als lengte, oppervlakte, gewicht, enz. Dit is bijvoorbeeld het geval bij kleding en schoenen. Voor het meten van de grootheid 'hoedenmaat' bestaan zelfs maten in de eerste betekenis van het woord. 5) Maat kan ook een verzamelnaam zijn voor alles wat met meten te maken heeft. In die zin komt het voor in de uitdrukking 'maattheorie'. Voorts merken we hier nog op dat, omdat het begrip 'eenheid' in de wiskunde vaak erg *maatloos* wordt gehanteerd, we het in de psychologische literatuur ingeburgerde woord 'maateenheid' hier en daar gebruiken om duidelijk aan te geven dat een eenheid altijd verbonden is met een maat (in de eerste betekenis van het woord).

8. Dickson, Brown & Gibson, 1984, p. 86 e.v.
9. Jochems, 1980, p. 74 e.v.
10. Dickson, Brown & Gibson, 1984, p. 86 e.v.
11. Van Parreren & Carpay, 1972, p. 68 e.v.
12. Idem, p. 75.
13. Bijvoorbeeld: Van Parreren & Carpay, 1972, p. 29-86.
14. Ter Heege & De Moor, 1977. De Jong, 1978.
15. Ter Heege & De Moor, 1977, p. 9.
16. Freudenthal, 1978.
17. Zie voor deze fasen paragraaf 3. We beperken ons in het volgende tot die aspecten van het Wiskobas-materiaal, die overeenkomst vertonen met de theorie van Piaget.
18. We gaan uit van de beschrijving die Van Parreren & Carpay, 1972, p. 72 e.v., er van geven.
19. In een eerder artikel behandelden we een aantal materialen, die bij de uitvoering van deze leergang gebruikt zouden kunnen worden (zie: Van 't Riet & Van der Wal, 1989).
20. Dickson, Brown & Gibson, 1984, p. 86-87.
21. Zie voor een uiteenzetting over de andere dan het materiële kennisniveau: Van 't Riet, 1983 en 1985.
22. Allerlei zaken als verkortingen die hierbij een rol kunnen gaan spelen, laten we hier verder buiten beschouwing.
23. Freudenthal, 1978, p. 109.
24. Treffers, 1978, p. 242.
25. Van Parreren & Carpay, 1972, p. 76.
26. Meester, Schoemaker & Vedder, 1980, p. 43.

Literatuur

- Dickson, L., M. Brown & O. Gibson, *Children learning mathematics, A teacher's guide to recent research*. Holt, Rinehart and Winston Ltd, Eastbourne 1984.
- Freudenthal, H., *Oppervlakte als verschijnsel benaderd*. In: De Jong 1978, p. 109-120.
- Heege, H. ter & E. de Moor, *Oppervlakte, Handleiding bij een werkblok voor het basisonderwijs*. *Wiskobas-bulletin* 7, 1/2, IOWO, Utrecht 1977.
- Jochems, W., *Leerstofanalyse*. Delftse Universitaire Pers, Delft 1980.
- Jong, R. de (Ed.), *Oppervlakte II, Handleiding bij een werkblok voor het basisonderwijs*. *Wiskobas-bulletin* 7, 5/6, IOWO, Utrecht 1978.
- Lovell, K., *De ontwikkeling van fundamentele wiskundige en natuurkundige begrippen in het kinderlijk denken*. Malmberg/Van In, 's-Hertogenbosch/Lier 1973.
- Meesters, F., G. Schoemaker & J. Vedder, *Rekening houden met individuele verschillen*. Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, Utrecht 1980.

- Parreren, C.F. van & J.A.M. Carpay, *Sovjetpsychologen aan het woord*. Wolters-Noordhoff, Groningen 1972.
- Parreren, C.F. van & J.A.M. Carpay, *Sovjetpsychologen over onderwijs en cognitieve ontwikkeling*. Wolters-Noordhoff, Groningen 1980.
- Riet, S.P. van 't, Zes kennisnivo's in het wiskundeonderwijs. *Euclides* 58, 7. Wolters-Noordhoff, Groningen 1983, p. 241-247.
- Riet, S.P. van 't, Zes kennisnivo's, Een nadere uitwerking. *Euclides* 60, 5. Wolters-Noordhoff, Groningen 1985, p. 181-188.
- Riet, P. van 't, J. Kroon & A. van der Wal, Wiskunde op materieel niveau, Een voorbeeld. *Euclides* 62, 9. Wolters-Noordhoff, Groningen 1987, p. 257-268.
- Riet, S.P. van 't, & A. van der Wal, Het gebruik van materialen bij de behandeling van het oppervlaktebegrip. *Nieuwe Wiskrant* 8, 2. Vakgroep OW en OC, Utrecht 1989, p. 35-41.
- Treffers, A., *Wiskobas doelgericht. Een methode van doelbeschrijving van het wiskundeonderwijs volgens Wiskobas*, IOWO, Utrecht 1978.
- Vademecum voor de wiskundeleraar*, Samengesteld door het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Wolters-Noordhoff, Groningen 1986.