Zes kennisnivo's in het wiskundeonderwijs[1])

S. P. VAN 'T RIET

Inleiding

Het streven van elke wetenschap behoort er uiteindelijk op gericht te zijn theorieën en modellen te ontwikkelen waarmee men de werkelijkheid beter kan verklaren, bevragen en manipuleren dan met de theorieën en modellen die tot heden toe werden opgesteld. Maar niet alleen beter verklaren, bevragen en manipuleren is een belangrijk doel voor een nieuwe theorie of een nieuw model, ook er beter de werkelijkheid mee te kunnen onderwijzen is een belangrijk en wellicht veel onderschat aspekt van theorieën en modellen. Bij mijn pogingen het leren van wiskunde aan mijn studenten te onderwijzen op een overzichtelijke en doeltreffende manier ben ik er toe gekomen een model van wat ik noem kennisnivo's te ontwikkelen, waarmee naar ik hoop de belangrijkste facetten van het leren van wiskunde voldoende uit de verf kunnen komen om een toekomstig leraar enig zicht te geven op de wijze waarop hij zijn wiskundeonderwijs het beste zou kunnen inrichten. Ongetwijfeld had ik het voorgestelde model niet kunnen bedenken zonder andere in de leerpsychologie bestaande modellen en theorieën te hebben bestudeerd. Sommige van de door mij behandelde kennisnivo's zullen de lezer sterk doen denken aan de theorie van Galperin[2]). Ik heb er echter geen behoefte aan in dit artikel overeenkomsten en verschillen met dergelijke modellen te behandelen, daar het mij er om gaat leraren en toekomstige leraren enige handvaten te geven voor de onderwijspraktijk en niet het voorgestelde model uitgebreid wetenschappelijk te bekommentariëren. Daarom zal ik nu met de deur in huis vallen.

Zes kennisnivo's

Wie in de wiskunde een bepaald begrip leert, kan daarover na afloop van dit leren

1) Het in dit artikel uiteengezette model van kennisnivo's werd al eerder door mij gepresenteerd op het NLO-Wiskunde Congres op 1 en 2 april 1982 in Utrecht. Tijdens deze presentatie werd door Jan Treur en Hildelien Verkuyl (D'Witte Leli) een wat ander maar aanverwant model gepresenteerd voor dezelfde verschijnselen.

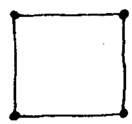
2) Zie b.v. C. F. van Parreren, J. A. M. Carpay, *Sovjetpsychologen aan het woord*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972, p. 40.

op zes verschillende nivo's kennis of informatie hebben. Als voorbeeld nemen we het begrip 'vierkant'. We komen het tegen in de volgende situaties:

a Een leerling knipt een stuk karton uit met dezelfde vorm als een gangbare trottoirtegel en ontdekt dat hij de tegel ermee kan afdekken in tal van verschillende standen van het stuk karton.

b De leraar zegt: 'Dit stuk karton heeft de vorm van een vierkant. Wat kun je zeggen van de zijkanten en de hoeken?' De leerling antwoordt: 'Die zijkanten zijn allemaal even lang en die hoeken passen precies op elkaar.'

c Een leerling tekent op papier een vierkant, nadat de leraar daarom gevraagd heeft:



d De leraar zegt: 'Je kunt de hoekpunten een naam geven. Meestal gebruiken we daarvoor hoofdletters uit het begin van het alfabet: A, B, C, D. De zijden kunnen we nu AB, BC, CD, AD noemen en de hoeken hoek A, hoek B, hoek C, en hoek D. Dat alle zijden even lang zijn, schrijven we als: $AB = BC = CD = AD$.'

e Een leerling tekent op papier een vierkant. De leraar vraagt: 'Waarom maak je bij de hoeken geen stip?' De leerling antwoordt: 'Omdat een stip een oppervlakte heeft, maar een punt niet.' Verder licht hij toe: 'In de tekening hebben de zijden een dikte, maar bij een echt vierkant is dat natuurlijk niet zo.' De leraar vraagt: 'Waarom teken je het vierkant groen?' De leerling: 'Dat maakt niet uit, een vierkant heeft eigenlijk geen kleur.'

f De leraar vraagt: 'Schrijf eens op wat je van een vierkant weet.' De leerling schrijft op:
'$\forall$ vierkant $ABCD: AB = BC = CD = AD$ en $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$.'

Het materiële kennisnivo

Bij a is de leerling bezig met konkrete materialen en voorwerpen waarmee hij konkrete handelingen verricht. Door een vierkant te maken van karton en ermee te manipuleren komt hij als vanzelf achter een groot aantal eigenschappen van het vierkant, ook als hij het woord vierkant misschien nog niet kent. Men hoeft het ontdekken van deze eigenschappen natuurlijk niet 'als vanzelf' te laten plaats vinden. Men kan de leerlingen bepaalde instrukties geven, opdrachten of vragen waardoor zij gemakkelijker die eigenschappen van het te leren begrip zullen vinden die men als leraar van belang vindt. Het gaat er bij het materiële kennisnivo om dat de leerling de kennis aan den lijfe opdoet. Het materiële nivo is in het wiskundeonderwijs altijd nogal onderbedeeld geweest. Gebruik maken van konkrete voorwerpen, materialen en gereedschap waarmee allerlei handelingen kunnen worden verricht ten einde kennis op te doen, vindt sporadisch plaats. Dat is jammer want abstrakte kennis kan alleen funktioneren als ze geworteld is in de konkrete kennis waaruit zij geabstraheerd is. Vooral voor zwakkere leerlingen zou leren op het materiële nivo wel eens een noodzakelijke fase kunnen zijn om überhaupt wat 'verder' te komen in de wiskunde.

Het verbale kennisnivo
Bij b hebben we te maken met uitspraken die in gewone omgangstaal geformuleerd zijn. Woorden als vierkant, zijkant of zijde, hoek e.d. worden toegepast op konkrete voorwerpen of onderdelen daarvan. Hierdoor wordt het mogelijk over deze voorwerpen en hun delen te kommuniceren. De taal die daarbij wordt gebruikt zullen we rekenen tot het verbale kennisnivo. Woorden, uitdrukkingen en zinnen worden onverkort gebruikt zoals dat het geval is in de gewone omgangstaal. Hoogstens worden nieuwe woorden of uitdrukkingen ingevoerd om het kommuniceren te vergemakkelijken. Het is belangrijk te zien dat de elementen waaruit dit kennisnivo bestaat (woorden, uitdrukkingen, zinnen, teksten) geen betekenis 'van zichzelf' bezitten. De woorden verwijzen altijd naar iets anders, bijvoorbeeld naar dingen of onderdelen van dingen op het materiële nivo. Het is de konventie die bepaalt waarnaar woorden verwijzen, de ongeschreven regels van het spraakgebruik of de gemaakte afspraken daarover. De uitspraak: 'Dit stuk karton heeft de vorm van een Jantje; alle Pietjes zijn even lang en alle Klaasjes zijn even groot' is voor elke Nederlander wartaal, tenzij hij weet wat er precies bedoeld wordt met Jantje, Pietjes en Klaasjes. Er is geen konventie waarop hij kan terugvallen. We zien: uitspraken op het verbale kennisnivo ontlenen hun betekenis aan informaties bijvoorbeeld uit het materiële kennisnivo. Dit betekent tevens dat we twee soorten kennisnivo's moeten onderscheiden: taalnivo's en betekenisnivo's.

Het konkreet-mentale kennisnivo
Bij c wordt de leerling gevraagd één vierkant te tekenen. Deze opdracht kan hij alleen uitvoeren als hij al weet wat een vierkant is. Hij moet dus in zijn geheugen een voorstelling van een vierkant hebben. Die voorstelling zal er niet een van woorden zijn, maar een die de vorm van een gedachtenplaatje heeft. Dat plaatje zal hij zich eerst voor de geest moeten halen en dit zal hij in het algemeen kunnen, zowel met de ogen open als met de ogen gesloten. Zo'n geheugenplaatje of voorstelling noemen we ook wel een *mentaal schema*. We zien bij c dat het mentale schema dat de leerling van een vierkant heeft, nog allerlei heel konkrete aspekten vertoont: de punten zijn stippen die dikker zijn dan de zijden, de dikte van de zijden hoeft nog niet uit de voorstelling verwijderd te zijn, de kleur waarmee het vierkant getekend is maakt het wellicht nog tot een ander vierkant dan het zou zijn met een andere kleur, de idee dat de zijden kaarsrecht zijn zonder ook maar de geringste bochten is ook nog geen wezenlijk onderdeel van de voorstelling. Kennis in een dergelijk stadium bevindt zich op het konkreet-mentale kennisnivo. Het gedachtenplaatje heeft nog vele kenmerken van de materiële tekening.
Om over mentale schema's te kunnen kommuniceren is het vaak handig, zo niet noodzakelijk, ze te tekenen of op een andere manier zichtbaar te maken. We zeggen dan dat het mentale schema *gematerialiseerd* wordt. Dat materialiseren gaat gepaard met het verrichten van allerlei handelingen. De mentale schema's van het konkreet-mentale kennisnivo liggen nog zeer dicht aan tegen deze materialisering en de daarbij behorende handelingen. De voorstelling van het vierkant is nog zeer verbonden met het tekenen ervan, het uitknippen, het uit zijn opening lichten, het draaien en terugleggen ervan, althans... Wat er allemaal tot

het mentale schema van het vierkant behoort, hangt af van de dingen die er op het materiële kennisnivo mee gedaan zijn. Zo zien we dat het ene nivo het andere kan voorbereiden.

Het konkreet-symbolische kennisnivo

In situatie d wordt informatie aangedragen in de vorm van symbolen die zeer gereduceerd van vorm zijn: één letter, twee letters of een kombinatie van symbolen. We zullen hier spreken van het konkreet-symbolische kennisnivo. Konkreet omdat de letters nog duidelijk namen zijn voor konkreet opgevatte voorwerpen of tekeningen. A is een hoekpunt van dìt vierkant en in principe niet van een ander vierkant. Ook hier geldt weer dat symbolen en beweringen op dit nivo geen betekenis 'van zichzelf' hebben. Ze verwijzen steeds naar zaken op het materiële of konkreet-mentale kennisnivo. Het konkreet-symbolische kennisnivo is weer een taalnivo, net als het verbale kennisnivo. In feite is het konkreet-symbolische kennisnivo ingebed in het verbale. Een uitspraak als 'voor deze diagonalen AC en BD geldt $AC = BD$' heeft zowel een verbaal als een konkreet-symbolisch aspekt. Men moet tussen verbaal en konkreet-symbolisch kennisnivo dan ook geen scherpe scheiding willen trekken: de taal van beide nivo's vermengt zich gemakkelijk. Wel is er in de wiskunde een tendens tot symbolisering en terugdringing van de gewone omgangstaal. Bij het leren van wiskunde zal dit tot uiting moeten komen door op het verbale kennisnivo te beginnen en vervolgens beetje bij beetje het konkreet-symbolische kennisnivo te introduceren.

Een goed hulpmiddel hierbij is de leerlingen steeds te leren de konkrete symbolen terug te vertalen in gewone omgangstaal. Wat bedoelen we eigenlijk met $=$, $//$, $\angle$, $AB = CD$, enz.? Maar niet alleen de verbinding tussen verbaal en konkreet-symbolisch kennisnivo is didaktisch van belang. Zeer belangrijk is dat de leerlingen de betekenissen van de symbolen kennen op het konkreet-mentale en/of materiële kennisnivo. Zo niet dan praten zij de leraar braaf na, maar begrijpen niet waarover het eigenlijk gaat.

Het abstrakt-mentale kennisnivo

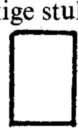
In situatie e komen we nogmaals het begrip vierkant tegen. Het mentale schema dat de leerling hier heeft, heeft ten opzichte van situatie c een paar wezenlijke wijzigingen ondergaan; het heeft zijn konkrete kenmerken verloren. We kunnen ook zeggen: het begrip is abstrakter geworden. Allerlei konkrete details zijn uit het schema verdwenen zoals: de stipvormigheid van de hoekpunten, de dikte van de zijden, de kleur van de tekening, de bochtigheid van de zijden, enz. De materialisering blijft in zekere zin in gebreke om dit te laten uitkomen en een verbale toelichting is nodig om het abstrakte karakter van het schema geheel te laten zien. We spreken nu van het abstrakt-mentale kennisnivo, want het gaat nog steeds om een mentaal schema, een gedachtenplaatje. Er is echter geen scherpe scheiding aan te brengen tusen het konkreet- en abstrakt-mentaal kennisnivo. Abstrakte schema's zijn voortgekomen uit konkrete en de overgang is waarschijnlijk eerder geleidelijk dan sprongsgewijs. Leerlingen kunnen een begrip in verschillende mate van abstraktie kennen. Zo is het mogelijk dat een leerling weet dat de zijden van een vierkant geen dikte hebben, maar zich niet realiseert dat er geen bochten en bobbels in zitten. Overgang van het konkreet-mentale naar het abstrakt-mentale kennisnivo (abstraheren) is een belangrijk doel voor het wiskundeonderwijs. Maar ook het zoeken van konkrete zaken die aan abstrakte begrippen voldoen (konkretiseren).

Het abstrakt-symbolische kennisnivo
Bij f maken we kennis met het abstrakt-symbolische kennisnivo. De leerling maakt gebruik van symbolen, maar deze symbolen zijn van een wat ander karakter dan die van het konkreet-symbolische kennisnivo. De letters staan hier niet meer voor de hoekpunten van één bepaald vierkant, maar voor de hoekpunten van alle vierkanten: de letters zijn *variabelen* geworden. Op dit nivo wordt ook gewerkt met kwantoren zoals $\forall$ en $\exists$. De blik is niet slechts op één konkreet voorbeeld gericht. Ook hier gaat het weer om een taalnivo dat zijn betekenis ontleent aan de mentale kennisnivo's of eventueel het materiële kennisnivo. Het is de vraag of de leerlingen op dit kennisnivo kunnen funktioneren als hun mentale schema's niet een grote mate van abstraktie bereikt hebben. In de praktijk van het wiskundeonderwijs wordt aan deze vraag te weinig aandacht besteed.

Nog een voorbeeld

De kommutatieve eigenschap van het vermenigvuldigen wordt meestal onderwezen op basis van veronderstelde kennis van en vaardigheid in rekenen. Veel rekenonderwijs en vooral eindonderwijs in het rekenen speelt zich af louter op het konkreet-symbolische kennisnivo: $2 \times 3 = 6$, $3 \times 2 = 6$, enz. Hiervandaan wordt rechtstreeks het abstrakt-symbolische kennisnivo geïntroduceerd met uitdrukkingen als $a \times b = b \times a$. Het geheel speelt zich alleen af op de symbolische taalnivo's. Er zijn echter ook andere mogelijkheden om de leerlingen met de kommutatieve eigenschap vertrouwd te maken . Op de drie betekenisnivo's kan dat bijvoorbeeld als volgt:

a Materieel kennisnivo.
Laat de leerlingen blokjes groeperen in verschillende formaties en formuleren welke vermenigvuldigingen erbij horen.
□□ □□ □□ is drie maal twee, maar
□□□ □□□ is twee maal drie; beide even veel.
De rechthoekige stukken hout



en

hebben een even grote oppervlakte, want twaalf bij acht is even veel als acht bij twaalf.

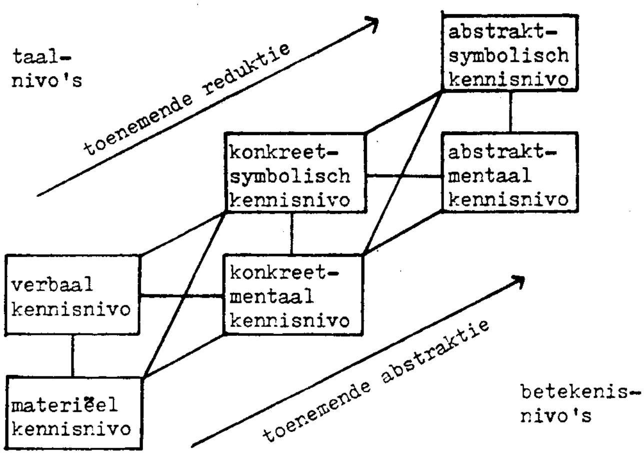
c Konkreet-mentaal kennisnivo.
De laatste voorstelling van de rechthoekige stukken hout kan gemakkelijk dienen om een mentaal schema op te bouwen bestaande uit rechthoeken in verschillende stand, maar met identieke afmetingen. Ook een schema als het

volgende kan het idee van vermenigvuldigen van dezelfde getallen in verschillende volgorde waarbij de uitkomst hetzelfde is tot uitdrukking brengen:

e Abstrakt-mentaal kennisnivo
Op dit nivo tenslotte zal de leerling een overeenkomstig gedachtenplaatje hebben als op het konkreet-mentale nivo, maar zal de beperking tot bepaalde aantallen of getallen niet meer overheersend zijn in de voorstelling: het schema is onbeperkt uitbreidbaar voor positieve getallen.

Nu zullen lang niet alle wiskundige onderwerpen even gemakkelijk op materieel en mentaal kennisnivo behandeld kunnen worden. In bovenstaand geval levert de uitbreiding tot negatieve getallen al aanzienlijke moeilijkheden op, want negatieve aantallen blokjes bestaan niet en negatieve oppervlakten hebben geen materieel ekwivalent. Dat is echter geen reden om daar waar het wel eenvoudig mogelijk is de wiskunde niet op betekenisnivo's te behandelen. Zo vergroot men het inzicht van de leerlingen en schiet de kennis dieper wortel. Zo wordt ook een basis gelegd voor die uitbreidingen van de wiskunde waarbij een beroep op materiële ervaringen en mentale schema's lastiger is geworden. Als men wiskunde alleen op de taalnivo's behandelt, wordt wiskunde voor veel leerlingen een onbegrijpelijk gegoochel met symbolen zonder betekenis.

We zouden het model van de zes kennisnivo's op de volgende wijze schematisch kunnen weergeven (fig. 1).



Figuur 1

De bruikbaarheid van het model

Tenslotte wil ik nog een paar opmerkingen maken over de betekenis en de bruikbaarheid van dit model voor het wiskundeonderwijs.

In het algemeen kan gezegd worden dat de kennis van de hogere nivo's slechts

dan goed kan funktioneren als deze geworteld is in kennis van de lagere nivo's. Wie nooit behoorlijk heeft leren rekenen (konkreet-symbolisch kennisnivo), zal moeite hebben met de algebra (abstrakt-symbolisch kennisnivo). Maar ook dit is geen absolute wet, want via een goede organisatie van de mentale kennisnivo's is heel wat begrip van algebra mogelijk die niet gebaseerd is op vaardigheid in rekenen. Men moet dus voorzichtig zijn met het willen voorschrijven van een 'leerweg' door het model heen, waarbij de leerstof behandeld moet worden in een vaste volgorde van kennisnivo's.
Ook de mate waarin men de verschillende kennisnivo's bij het onderwijzen van een onderwerp aan de orde moet laten komen, is m.i. niet in het algemeen aan te geven. Wel is het aan te bevelen begrippen op zoveel mogelijk kennisnivo's te behandelen. Hierdoor ontstaat voor de leerlingen een netwerk van informaties met vele ingangen en vele verbindingen. Het is in dit verband van belang te herhalen dat de kennis der taalnivo's geen betekenis heeft 'van zichzelf', maar betekenis ontleent aan zijn relatie met de materiële en mentale nivo's.
In het huidige wiskundeonderwijs dat zeer 'talig', zeer symbolisch is, wordt aan de betekenisnivo's vaak te weinig aandacht besteed. Dit betekent dat de (aanstaande) leraar zijn leerboek juist op deze kennisnivo's regelmatig zal moeten aanvullen. Met name het materiële kennisnivo is een nog tamelijk onontgonnen gebied voor velen. Een andere zaak die het model kan verduidelijken is dat de weg van voortgaande abstraktie een lange weg is die in fasen moet worden afgelegd en vaak opnieuw van onderaf moet worden opgestart. Ook is denken en redeneren een aktiviteit waarbij leerinhouden van verschillende nivo's gebruikt worden. Problemen kunnen zich daarbij voordoen *op de kennisnivo's*, maar ook bij de overgang *van nivo naar nivo*. Het aanvangsonderwijs in de wiskunde zal zich vooral op de lagere kennisnivo's moeten bewegen. Het leveren van bewijzen is in het algemeen zo verbonden aan het abstrakt-symbolische kennisnivo, dat men er slechts mondjesmaat mee moet omspringen in de laagste klassen van het voortgezet onderwijs. Ik ben mij ervan bewust dat dit alles nadere uitwerking verdient. Misschien is daarvoor gelegenheid in een later artikel.

***Over de auteur*:**
Peter van 't Riet is hoofddocent wiskunde aan de Christelijke Lerarenopleiding te Zwolle en publiceerde eerder in Euclides over setvorming.

Noten

1) Het in dit artikel uiteengezette model van kennisnivo's werd al eerder door mij gepresenteerd op het NLO-Wiskunde Congres op 1 en 2 april 1982 in Utrecht. Tijdens deze presentatie werd door Jan Treur en Hildelien Verkuyl (D'Witte Leli) een wat ander maar aanverwant model gepresenteerd voor dezelfde verschijnselen.
2) Zie b.v. C. F. van Parreren, J. A. M. Carpay, *Sovjetpsychologen aan het woord*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972, p. 40.