Setvorming en wiskundeonderwijs[1)]

V Setvorming in de wiskunde van het havo en vwo

S. P. VAN 'T RIET

1 Inleiding

In de vier voorgaande artikelen in deze serie (Van 't Riet, 1979 en 1980; Van 't Riet en De Leeuw, 1980 a en b) is het begrip 'setvorming' geïntroduceerd. Het werd onderverdeeld in 'Einstellung' en 'rigiditeit'. Ook werd een schets gegeven van het onderzoek dat in de loop der jaren naar setvorming is gedaan. In dit laatste artikel zal ik een aantal voorbeelden van setvorming in de wiskunde van het havo en vwo de revue laten passeren en een paar suggesties doen hoe men in het wiskundeonderwijs met dit verschijnsel rekening kan houden. Daarmee heeft deze serie dan naar ik hoop haar einddoel bereikt, te weten een bijdrage te leveren tot de totstandkoming van een beter inzicht in wiskundeonderwijs.
Einstellung is in het eerste artikel omschreven als een type gedrag van leerlingen waarbij onder invloed van training ingewikkelde oplossingsmethoden gehanteerd blijven worden in situaties waarin de leerling beschikt over geschikte, meer gemakkelijke oplossingsmethoden. Rigiditeit is dan het onvermogen volgens de meer gemakkelijke methode te werk te gaan in geval de moeilijke methode niet meer tot resultaat leidt. Hier wil ik wijzen op een komplikatie. Bij de begrippen 'Einstellung' en 'rigiditeit' is wel verondersteld dat de leerling over de *juiste* oplossingsmethoden beschikt. Een leerling die opschrijft

$$x^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{(10^2 - 0)}}{2}$$

vertoont slechts één Einstellung, te weten het gebruik van de abc-formule. Het feit dat hij in de abc-formule bij b het tweede getal uit de vergelijking invult, zou ik geen Einstellung willen noemen, maar een verkeerde organisatie van zijn oplossingsmethode.
In het eerste artikel heb ik betoogd dat rigiditeit wel, Einstellung niet altijd negatief beoordeeld moet worden. Dit hangt namelijk af van de door het onderwijs nagestreefde doelen. Wil men de leerlingen binnen een klasse van oplossingsmethoden voor een bepaald soort problemen een zekere flexibiliteit

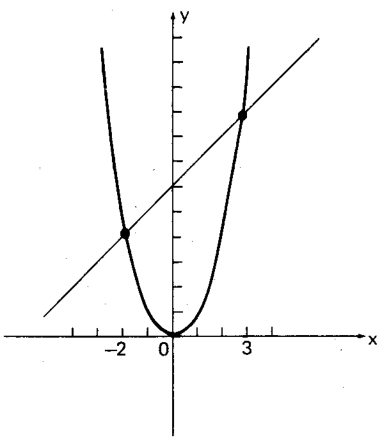
1 Veel dank ben ik verschuldigd aan Dr. P. G. J. Vredenduin voor het kritisch lezen en van opmerkingen voorzien van de concepttekst van alle vijf artikelen van deze serie. Dit zelfde geldt Dr. L. de Leeuw voor die drie afleveringen die ik op mijn eigen naam geschreven heb.

bijbrengen dan is het duidelijk dat men een Einstellung van leerlingen als een minder gunstige vorm van gedrag zal aanmerken. In het wiskundeonderwijs zal dit inderdaad nogal eens voorkomen. Men moet zich dan wel de vraag stellen of men als leraar hiertoe wel het recht heeft. Dit is m.i. pas dan het geval als men in het onderwijs aan het verschijnsel Einstellung de nodige aandacht besteed heeft en de leerlingen expliciet geleerd heeft steeds de eenvoudigste oplossingsmethode voor een probleem te kiezen. Het volgende voorbeeld doet er aan twijfelen of dit wel altijd gebeurt.

2 Vergelijkingen oplossen of aflezen uit grafieken?

Van Hiele (1973, p. 15) geeft ter illustratie van de vraag:
'Is het gebruik van grafieken geoorloofd als bewijsmiddel?' het volgende voorbeeld (zie daarbij fig. 1).

> De leerlingen krijgen bijvoorbeeld een vraagstuk van de volgende vorm:
> Teken de grafiek van $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = x^2\}$.
> Kies voor x waarden van -5 tot $+5$.
> Teken in dezelfde figuur de grafiek van $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = x + 6\}$.
> Los op de ongelijkheid $\{x \in \mathbb{R} | x^2 > x + 6\}$.
> Als de leerlingen nu uit de grafiek aflezen:
> $\{x \in \mathbb{R} | x < -2 \vee x > 3\}$, dan wordt hun maar een deel van het aantal punten uitgekeerd dat voor deze opgaaf is vastgesteld, want de steller van de opdracht had zich voorgesteld, dat de leerlingen de vierkantsvergelijking: $x^2 - x - 6 = 0$ op een of andere manier zouden hebben opgelost.



Figuur 1 De grafieken van de funkties $x \to x^2$ en $x \to x + 6$, met behulp waarvan de oplossingsverzameling van de ongelijkheid $x^2 > x + 6$ is af te lezen.

Terecht protesteert Van Hiele tegen deze gang van zaken. In feite toont de leerling zich in dit verband de meester van de leraar. De leerling zoekt zich volgens de beste tradities van de wiskunde de meest gemakkelijke weg uit het probleem. Het is de leraar die hier aan setvorming lijdt, weliswaar niet in het oplossen van wiskundige vraagstukken, maar in het bepalen van de doelstellingen van zijn onderwijs. Natuurlijk, één van de doelstellingen van het wiskundeonderwijs mag zijn het kunnen oplossen van vierkantsvergelijkingen. Maar men mag m.i. nooit de leerlingen leren als automaten vierkantsvergelijkingen op te stellen en op te lossen, ook in situaties waarin dat volstrekt overbodig is. Dan brengt men de leerlingen bewust een Einstellung bij. Wie wil toetsen of leerlingen vierkantsvergelijkingen kunnen oplossen, moet in een vraagstuk als het bovenstaande of (1) uitdrukkelijk vragen een oplossing te geven waarbij een vergelijking wordt opgelost, of (2) de coëfficiënten in de funkties zo kiezen dat bij het tekenen van de grafieken de coördinaten van de snijpunten niet evident te voorschijn komen. Beter nog zou het zijn als de leraar zijn leerlingen leert dat berekeningen bij het maken van grafieken en het aflezen van een oplossingsverzameling uit de verkregen figuur enerzijds en het oplossen van een vergelijking anderzijds hier twee oplossingsmethoden zijn die beide legitiem zijn, maar niet in alle situaties bruikbaar of efficiënt. Eerst dan kan een zeer belangrijke doelstelling van wiskundeonderwijs verwezenlijkt worden: Zelfstandig doelmatige algoritmen kunnen kiezen (Van Dormolen, 1974, p. 48).

3 Vierkantsvergelijkingen

Direkt in het verlengde van het voorgaande ligt de volgende vraag van Van Dormolen (1974, p. 23) in zijn 'Didactiek van de wiskunde':

> De vergelijkingen $x^2 = 36$, $x^2 - 5x = 0$, $x^2 - 5x + 6 = 0$ en $x^2 - 5x + 5 = 0$ kunnen elk volgens een ander algoritme opgelost worden. Elk van deze algoritmen is op zeker moment leerstof. Het is niet noodzakelijk iemand alle vier algoritmen te leren: alle vergelijkingen kunnen met de abc-formule worden opgelost. Bedenk een doelstelling waaruit men kan afleiden, dat het zinvol is iemand toch vier algoritmen te leren.

De aan het eind van paragraaf 2 geformuleerde doelstelling kan nu worden toegespitst: de abc-formule is voor alle vierkantsvergelijkingen doelmatig, maar niet steeds het meest efficiënt. In elke situatie het meest efficiënte algoritme kiezen is een doelstelling die goed nagestreefd kan worden met een veelsoortigheid aan vierkantsvergelijkingen.

Beperk ik mij nu tot het gebruik van de abc-formule en het ontbinden in faktoren, dan is het mogelijk dat leerlingen een set ontwikkelen op het gebruik van de abc-formule. Deze set is gemakkelijk aan te brengen met trainings- of setproblemen zoals $x^2 - 5x + 5 = 0$. Einstellung kan nu gekonstateerd worden als vervolgens problemen zoals $x^2 - 5x + 6 = 0$ worden voorgelegd. Deze problemen kunnen we kritische problemen noemen: zal de leerling van de abc-formule overstappen op het ontbinden in faktoren? Wellicht is het zelfs mogelijk hier rigiditeit aan het licht te brengen. Als extinktieproblemen kan men opgaven zoals $x^2 - 98x - 200 = 0$ nemen, die door het gekompliceerde rekenwerk nauwelijks met de abc-formule zijn op te lossen (het gebruik van zakrekenmachines buiten beschouwing gelaten). Maar de ongebruikelijk grote getallen zoals 98 en 200

moeten ons hier enigszins voorzichtig doen zijn. Het is mogelijk dat leerlingen niet in staat zijn te ontbinden met dit soort getallen.
Aan degenen die nu van het bovenstaande gebruik willen maken bij het opstellen van proefwerken zou ik wel het volgende in overweging willen geven. Einstellungseffekten mag men m.i. alleen dan met een toets meten, als men de leerlingen onderwezen heeft in het vermijden van Einstellung, d.w.z. het gebruik maken van het meest efficiënte algoritme. Elke toets behoort tenslotte aan te sluiten bij doelstellingen en bij leerstof. Vermeden moet worden dat toevallige gedragskenmerken proefwerkcijfers bepalen. Echter de mate waarin men in het huidige wiskundeonderwijs aandacht besteedt aan efficiëntie van algoritmen, zou ik met vraagtekens willen omringen.
In de wiskundeboeken voor het havo en vwo komt deze problematiek niet of in geringe mate aan de orde. In Sigma deel 3v (hoofdstuk 5, p. 130 e.v.) en in Van A tot Z deel HV-3b (hoofdstuk XVIII, p. 55 e.v.) worden ontbinden en abc-formule afzonderlijk behandeld zonder in te gaan op het gebruik maken van de meest efficiënte methode. In Getal en Ruimte deel 3VI (hoofdstuk IV, p. 57 e.v.) volgt op de behandeling van beide methoden een oefening (p. 65) die luidt:

Los op: gebruik niet de abc-formule, als het handiger kan.

In Moderne Wiskunde deel 4hv (hoofdstuk 8, p. 146 e.v.) vinden we ook een dergelijke opdracht (p. 155). In de antwoorden die dit laatste boek achterin voor de leerlingen afdrukt, staan vervolgens wel de oplossingsverzamelingen, maar niet de meest efficiënte oplossingsmethoden vermeld. Een zelfwerkzame leerling krijgt dus geen feed-back op het belangrijkste gedeelte van de opdracht.
Ik denk dat het goed zou zijn als de schoolboeken in verband met de hierboven besproken doelstelling, wat uitgebreider zouden ingaan op het vraagstuk van de efficiëntie van de te gebruiken algoritmen. Dit is niet alleen van belang bij het oplossen van vierkantsvergelijkingen, maar eveneens bij zeer vele andere onderwerpen in de schoolwiskunde. De volgende voorbeelden mogen dat illustreren.

4 Twee vergelijkingen met twee onbekenden

Voor het oplossen van een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden zijn verschillende methoden voorhanden. De meest voorkomende in de schoolwiskunde zijn de zogenaamde substitutiemethode en de methode van elimineren door kombineren, de laatste meestal uitgevoerd in de volgende of een aanverwante vorm[2]:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 2 = 0 \\ 2x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$
$$\overline{\qquad 5y \qquad = 0} \; - \qquad \text{enz.}$$

Het bestaan van deze beide methoden biedt mogelijkheden te vragen naar het gebruik van de meest efficiënte. Maar ook binnen één methode zijn er meer en minder efficiënte aanpakken mogelijk. In een les gegeven door een hospitant maakte ik mee dat de stelsels vergelijkingen

2 Tegen deze en aanverwante oplossingsschrijfwijzen zijn ongetwijfeld bezwaren in te brengen. Ik heb echter weergegeven hetgeen ik in een aantal leerboeken ben tegengekomen. Zie b.v. Moderne Wiskunde deel 3hv, z.j., p. 143: Sigma deel 3v, 1975, p. 101: Lepoeter, 1974, p. 47.

$$\begin{cases}2x - 7y + 3 = 0\\3x - 7y + 1 = 0\end{cases} \text{ en } \begin{cases}2x - 3y \quad = 0\\2x - \ y - 5 = 0\end{cases}$$

door de leerlingen werden opgelost door de eerste vergelijking met 1 te vermenigvuldigen en de tweede met -1 om vervolgens beide nieuw verkregen vergelijkingen op te tellen. Hoewel de hospitant de leerlingen tijdens de les herhaaldelijk wees op de mogelijkheid om direkt af te trekken, bleven vele leerlingen hardnekkig naar de optelling toewerken. Tijdens het nagesprek over de les bleek dat de hospitant in de voorafgaande les bij het introduceren van deze oplossingsmethode uitsluitend de mogelijkheid van het optellen behandeld had. Kennelijk hadden de leerlingen hierop een Einstellung verworven. Deze had waarschijnlijk voorkomen kunnen worden door bij de introduktie van deze methode direkt zowel het optellen als het aftrekken te behandelen. Dit geval lijkt in zijn eenvoud erg veel op dat van de wortelvermenigvuldigingen (zie Van 't Riet en De Leeuw, 1980 b). Het gaat om een keuze uit twee eenvoudige stappen aan het begin van het oplossingsproces. Ook hier valt één van die eenvoudige stappen ten prooi aan een sterke Einstellung als men beide mogelijkheden niet vanaf het begin naast en door elkaar behandelt (BLOK- versus MIXED-leerstofaanbieding).
Bovenstaande stof werd onderwezen uit Moderne Wiskunde deel 4hv (hoofdstuk 7, p. 142 e.v.). Het betreffende hoofdstuk eindigt met de opdracht:

Los de volgende stelsels vergelijkingen op. Kies daarbij de methode die je het gemakkelijkst voorkomt.

Daarna volgen veertien opdrachten. Ook hier weer geen verdere toelichting op het probleem van de efficiëntie der methoden, noch in de tekst, noch in de antwoordenlijst. Mijns inziens is dit jammer, daar er zodoende een kans gemist wordt op dit probleem wat dieper in te gaan. In de veertien opdrachten zijn dan ook niet alle mogelijkheden op dit gebied benut. Een opgave als bijvoorbeeld

$$\begin{cases}2(2x - y) = 6 + x\\x = 2x - y\end{cases}$$

zou in deze kontekst goede diensten kunnen doen.

5 Produkten met haakjes

Bij het oplossen van het laatste stelsel vergelijkingen zullen vele leerlingen de neiging hebben onmiddelijk in de eerste vergelijking de haakjes uit te werken om vervolgens met de geleerde methode van het elimineren door kombineren het stelsel op te lossen. Deze Einstellung op het uitwerken van haakjes komt veelvuldig voor in het wiskundeonderwijs. In het tweede artikel van deze serie gaf ik daarvan reeds een voorbeeld bij het bepalen van het snijpunt van de grafieken

$$f: x \to \frac{2(x^2 + 4x + 3)}{x + 3} \text{ en } g: x \to x + \tfrac{1}{2}.$$

Het uitwerken van de haakjes in de teller van f(x) is zeer suggestief, maar blokkeert onmiddelijk de gemakkelijke oplossing met ontbinden van faktoren. Vraagt men zich af waar deze Einstellung vandaan komt, dan moet men ernstig rekening houden met de mogelijkheid dat zij een gevolg is van het onderwijs in de onderwerpen haakjes verdrijven en herleiden van produkten. Het uitwerken van dergelijke haakjesvormen wordt de leerlingen veelal zonder restrikties geleerd. In geen enkel leerboek voor havo en vwo ben ik tegengekomen dat de leerlingen bij dit onderwerp enige kritische zin wordt bijgebracht voor hetgeen zij uitvoeren. De oefening in het herleiden neemt soms een fabelachtige vlucht, zoals b.v. in Sigma deel 2hv (1974, p. 49) waarin opgaven voorkomen als:

$$\text{Bereken}\quad \frac{2ac}{3b}\left(\frac{9b^2}{4ac}+\frac{3ab}{4a^2c^2}-\frac{6b}{8ac^3}\right).$$

Men moet echter vrezen dat d.m.v. dergelijke opgaven vele leerlingen niet alleen geen kritische zin ontwikkelen voor wat er wiskundig van ze verlangd wordt, maar dat er zelfs een kritische tegenzin in wiskunde door ontstaat. Eenvoudige opgaven als:

$$\text{Bereken}\quad 12a(9b+3-8b)$$

ben ik in geen enkel leerboek tegengekomen.
Breiden we in dit verband ons blikveld uit tot het vermenigvuldigen van veeltermen, dan wordt het optreden van Einstellung nog pregnanter. Eén van mijn hospitanten had eens in een 2-atheneumklas in een proefwerk over het vermenigvuldigen van veeltermen (Moderne Wiskunde deel 3hv, z.j., p. 7 e.v.) de volgende opgave opgenomen:

$$\text{Werk uit}\quad (1+x+6)^2.$$

Hij verbaasde zich over de 'domheid' van vele leerlingen die als antwoord hadden opgeschreven:

$$1+x+6+x+x^2+6x+6+6x+36=x^2+14x+49.$$

In de oplossing van de opgave:

$$\text{Werk uit}\quad (x^2+2x-x^2-2y)(2y+2x)$$

waren vele leerlingen blijven steken. Op mijn vraag of hij tijdens de behandeling van de leerstof dit soort sommen met de leerlingen besproken had, antwoordde hij ontkennend. De leerlingen moesten maar pienter genoeg zijn om zelf achter de handigste methode van oplossen te komen.
Wat hier gebeurt, is in feite zeer inkonsekwent. In de lessen werden de leerlingen met een flink aantal opgaven van het type

$$(3x-2)^2 \quad \text{en} \quad (x-1)(x^2+x-1)$$

getraind in de techniek van het uitwerken van dergelijke vermenigvuldigingen.

Waarom? Om ze te leren deze snel en effektief uit te voeren. Maar zodra de leerlingen dit leerproces achter de rug hebben en zij getest worden in hun vaardigheid, moeten ze onverhoeds het gebruik van die techniek weten uit te stellen om dit vooraf te laten gaan door een nimmer in het kader van deze opgaven tegengekomen herleiding. Natuurlijk, zowel herleiding als vermenigvuldiging van veeltermen moeten tijdens dit proefwerk voor de leerlingen bekende zaken zijn. Maar het wiskundeonderwijs heeft ze steeds afzonderlijk behandeld. Men kan hier met Van Parreren (1972, p. 40) spreken van systeemscheiding. Door het onderwijs is een systeem 'vermenigvuldigen van veeltermen' opgebouwd en vroeger ook al eens een systeem 'herleiden'. Het eerste systeem is tijdens het proefwerk in hoge aktiviteit. Plotseling wordt er oplossingsgedrag gevraagd vanuit het tweede, niet aktieve systeem. Dit is ongerechtvaardigd als leerlingen nimmer geleerd wordt verschillende van dergelijke systemen (oplossingsmethoden) in kombinatie te gebruiken. Wie in zijn onderwijs oplossingsmethoden leert zonder ze te kombineren, maar tijdens proefwerken wel kombinaties van oplossingsmethoden van de leerlingen verlangt, die toetst niet zijn onderwijs, maar de toevallige inventiviteit van de leerlingen op dat ene moment.
Andere opgaven die voor het wiskundeonderwijs bruikbaar zijn in dit verband, zijn:

Werk uit $(a + 3a)^2$ en $(a - b)^2 - (b - a)^2$.
Los op $(3x - 2)(x + 7) = 3x - 2$.

De laatste opgave is gebaseerd op de equivalentie $ap = aq \Leftrightarrow a = 0 \vee p = q$. Bij de behandeling van deze equivalentie in Getal en Ruimte deel 2V2 (1973, p. 24) wordt wederom nergens ingegaan op de efficiëntie-problematiek i.v.m. de meer algemene methoden om kwadratische vergelijkingen op te lossen.

6 Seteffekten bij het differentiëren van funkties

Bij het bepalen van de afgeleide van de funktie $x \to {}^a\log x$ is het nodig deze te schrijven als $x \to \dfrac{\ln x}{\ln a}$. Is de afgeleide van $x \to \ln x$ bekend, dan is de afgeleide van $x \to {}^a\log x$ eenvoudig te bepalen als $x \to \dfrac{1}{\ln a} \cdot \dfrac{1}{x}$. Bij de behandeling van deze afleiding stellen leerlingen soms voor de quotiënregel te gebruiken en werken dan uit:

$$\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{\frac{l}{x} \cdot \ln a - \ln x \cdot 0}{(\ln a)^2}.$$

Dit is een fraai voorbeeld van een Einstellung: De schrijfwijze van de funktie toont een quotiënt. Dit uiterlijke kenmerk bepaalt de keuze van de oplossingsmethode.
Sets op bepaalde regels van het differentiëren kan men met tal van funkties aan het licht brengen:

$x \to \sqrt{(x^2)}$; $x \to e^{\ln x}$
$x \to \ln 2x - \ln x$; $x \to \ln e^x$
$x \to \dfrac{x^2 - 5x}{x(5-x)}$; $x \to \dfrac{d}{dx}\int_0^x (t^2 + 3t)dt$

Ook hier geldt echter weer: onderwijst men de leerlingen alleen in de regels van het differentiëren, of leert men hun zoeken naar de efficiëntste oplossingsmethode? In dit verband is een vraag van Van Dormolen (1974, p. 72) op zijn plaats:

> Wat zou de leraar bedoelen die tegen zijn leerlingen zegt: 'Bereken de uiterste waarden van de funktie $x \to 2\sin x \cdot \cos x$ zonder gebruik te maken van differentiaalrekenen.'? Vindt u het moreel aanvaardbaar iemand een goede oplossingsmethode te verbieden?

Het is maar welke doelstellingen je voor het wiskundeonderwijs kiest.

7 Setvorming, overal setvorming

Over de hele breedte van het wiskundeonderwijs komt de mogelijkheid van setvorming voor. In deze paragraaf geef ik nog een aantal incidentele voorbeelden om de uitgestrektheid van het verschijnsel te illustreren.

1 Voor de berekening van de afstand van twee punten $P(x_1, y_1)$ en $Q(x_2, y_2)$ in het vlak leidt men de formule af

$$d(P, Q) = \sqrt{((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)}.$$

Maar hoe berekenen leerlingen de afstand van de punten $(-3, 5)$ en $(7, 5)$?

2 Voor een niet aan de y-as evenwijdige rechte in het vlak is de algemene vergelijking $y = ax + b$ in zwang. Gegeven twee punten vult men de coördinaten in en berekent men de coëfficiënten. Maar hoe zouden we willen dat leerlingen de vergelijking van de lijn door $(5, 4)$ en $(-1, 4)$ opstellen? Of van de lijn door $(-1, -1)$ en $(3, 3)$?

3 In Sigma deel 2hv (1974, p. 177) staat de volgende serie opgaven:

Los op in $\mathbb{R}$:
a $-\frac{1}{2} < \frac{2}{3}x < \frac{1}{4}$ b $-\frac{1}{3} < 1 - \frac{1}{4}x < \frac{1}{6}$ c $\frac{2}{7} < 2 - \frac{3}{14}x < \frac{4}{35}$.

Hier lopen zelfs docenten die de som voor de eerste maal behandelen, de kans setvorming te vertonen. Een hospitant heb ik eens zonder blikken of blozen som c zien oplossen als som a en b. Toen een heldere leerling hem erop wees dat er iets geks met deze som was, begon de hospitant een uitgebreide explikatie te houden over de komma in de oplossingsverzameling $\langle 8, 8, 8 \rangle$.

4 Opdracht: Bepaal de coördinaten van de snijpunten van de parabool met vergelijking $y^2 = 8x$ en de lijn met vergelijking $2x - y - 3 = 0$. Leerlingen zullen nu vaak een Einstellung vertonen op de afleiding $2x - y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 3$, waarna met substitutie volgt: $(2x - 3)^2 = 8x$. De voortzetting van de oplossing is vervolgens nogal gekompliceerd. Ook hier is het leren zoeken naar de eenvoudigste oplossingsmethode van belang. Waarom voor y een uitdrukking in x gezocht? Waarom niet voor x een

uitdrukking in y? De afleiding $2x - y - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = y + 3$ met vervolgens het substitutieresultaat $y^2 = 4(y + 3)$ leidt tot een veel eenvoudiger oplossing. Het is maar wat men de leerlingen leren wil.

5 In Getal en Ruimte deel 2VI (1973, p. 43) komt de ongelijkheid $2x + 1 < 8$ met grondverzameling $\mathbb{N}$ voor. S is de oplossingsverzameling. Er wordt gevraagd: Waarom is $3 \in S$? Op de vraag van een hospitant hoe je dat nagaat, hoorde ik een leerling antwoorden: 'Eerst 1 naar de andere kant brengen.' De hospitant sputterde tegen: 'Is dat nu wel nodig?' 'Je moet toch S uitrekenen? Hoe kun je anders weten of 3 erin zit?' stelde de leerling met enige verwondering vast. Zij had een set ontwikkeld op het bepalen van oplossingsverzamelingen. Maar misschien moeten we voorzichtig zijn met deze konklusie in dit geval. Het is mogelijk dat de leerling niet meer beschikte over het schema van het oplossen van een variabele uit een open uitspraak.

6 In een 3-vwo-klas werden voorafgaand aan de behandeling van gebroken vergelijkingen, vergelijkingen van het type

$$\frac{x^2 + 5}{10} = \frac{3}{5}x$$

behandeld (zie Lepoeter, 1975, p. 73 e.v.). Het ging daarbij om oude stof, die al eerder uitgebreider aan de orde was geweest. Deze vergelijkingen werden opgelost door beide leden te vermenigvuldigen met één of meer faktoren uit de noemers. Daarna werden gebroken vergelijkingen behandeld zoals

$$\frac{1}{x + 3} = \frac{6}{x - 2}.$$

Deze vergelijkingen werden opgelost door op nul te herleiden, gelijknamig te maken, enz. Zij vormden het leeuwendeel van de doorgenomen leerstof. Een hospitant die in deze klassen over deze stof een proefwerk gaf, meldde nu dat 41 van de 48 leerlingen de opgave

$$\frac{x^2 + 5}{3} = \frac{3}{2}x$$

hadden opgelost op de wijze van de gebroken vergelijkingen. Slechts zeven leerlingen losten de vergelijking op door beide leden met 6 te vermenigvuldigen.

7 De vektormeetkunde laat allerlei mogelijkheden tot vorming van sets zien. Daarvan het volgende voorbeeld (Sigma, Vectormeetkunde en Statistiek, deel 4/5h, 1977, p. 146).

> Bereken $a \in \mathbb{R}$ als de punten $A(3, -1, 4)$, $B(1, 0, 1)$ en $C(-1, a, -2)$ op één lijn liggen.

De leerlingen zullen nu geneigd zijn de vektorvoorstelling van de lijn door A en B op te stellen, daarin de coördinaten van C te substitueren om vervolgens de waarde van de parameter en de waarde van a te berekenen. Een eenvoudiger methode is hier op te merken dat er een waarde van p zal bestaan waarvoor geldt: $\vec{AB} = p\,\vec{BC}$. Na het uitschrijven van deze gelijkheid met behulp van kentallen is de gevraagde waarde van a direkt af te lezen. Veelvuldige training in het leren opstellen van vektorvoorstellingen èn nadruk erop de techniek daarvan goed te beheersen kan er hier toe leiden dat naar andere aanpakken van het probleem niet meer gezocht wordt. Het zoeken naar korte en efficiënte oplossingen is een doelstelling die in de vektormeetkunde wellicht het meest systematisch is na te streven.

8 Setvorming bij het gebruik van hulpmiddelen

Tot slot nog een voorbeeld waaruit kan blijken dat setvorming niet alleen optreedt bij het gebruik van oplossingsmethoden en algoritmen, maar ook bij het hanteren van hulpmiddelen zoals passer en geodriehoek. Het onderstaande voorbeeld van Einstellung kreeg ik toegestuurd van S. L. Kemme en ik neem het enigszins samengevat over:

De les was een afsluiting van een serie lessen over doorsnijdingen van meetkundige plaatsen (Getal en Ruimte deel 2VI, 1973, p. 49 e.v.). De leerlingen kregen de volgende opdracht uitgedeeld:

> Jan de Vries maakt een fietstocht door een bosrijke omgeving van Drenthe. Hij raakt de weg kwijt, maar komt tenslotte bij een kruising aan met een wegwijzer: 20 km naar Groningen, 20 km naar Drachten, 15 km naar Assen. Waar staat Jan?

Op het stencil was een fragment van een kaartje getekend met daarop de plaatsen Groningen, Drachten en Assen en een aantal naburige, bekende plaatsen.

Nadat de leerlingen de schaalproblemen overwonnen hadden, kwamen al gauw de eerste cirkels op papier. Ook leerlingen die met de geodriehoek waren begonnen, zagen snel in dat je met de passer beter kunt omcirkelen. Met een minuut of vijf had toch zeker 70% van de klas de opgaaf af.

Interessant was echter het gedrag van een meisje, dat alleen aan een tafeltje zat. Ze had alleen een beetje kontakt met haar voorbuurvrouw. Toen bijna 70% van de klas klaar was, zat zij nog met haar geodriehoek te modderen. Eerst vanuit Drachten, dan vanuit Groningen, dan vanuit Assen. Ze had een passer gebruiksklaar voor haar liggen. Ze zag dat bijna de hele klas passers aan het gebruiken was. Tenslotte ging ze ook een cirkel tekenen, maar een met het midden van het lijnstuk Drachten-Groningen als middelpunt. Daarna ging ze weer vlijtig verder met haar geodriehoek. Eindelijk vond ze het gevraagde punt.

Ik was een beetje in de buurt blijven hangen. Ze zei: 'Ik heb het.' Ik ging naast haar staan en vroeg: 'Hoe weet je dat?' Ze ging het keurig voor me uitmeten en inderdaad, het klopte precies. Toen vroeg ik: 'Waar is die cirkel voor?' Daarop begon ze aan haar uitleg, een paar punten van de cirkel aanwijzend: 'Nou, die punten liggen 20 km van Groningen en van Drachten...' Ze brak haar verhaal plotseling af. 'O nee, dat is niet goed.' Met haar handen gaf ze aan hoe die cirkels wel hadden moeten lopen en begon de boel met een gummetje uit te vegen. 'Nu ga ik het goed doen,' zei ze, pakte de passer en tekende de drie cirkels.

Wat me vooral trof, was het feit dat ze zo volhardend was in het gebruik van haar geodriehoek en dat ze door mijn simpele vraag zo plotseling omsloeg in haar gedrag, doordat ze gedwongen werd de zaak te verwoorden en toen haar fout inzag. Ik vroeg me af, in verband met mijn interesse voor taalaspekten, of dit een vorm van Einstellung was en of een dergelijk verwoorden een remedie kan zijn tegen dit soort Einstellungen (einde citaat).

Naar aanleiding van dit voorbeeld en de vraag waarmee het eindigt, wijs ik op de beschouwingen van Eliawa (1967) over Einstellung. Hij stelt dat een Einstellung pas dan overwonnen kan worden als er een zogenaamde Objektivierungsakt plaatsvindt. Het aan Usnadse ontleende Objektivierungsbegrip komt min of meer hier op neer, dat de denkende persoon zijn denken als het ware moet verplaatsen naar een hoger niveau, vanwaaraf hij zijn aanvankelijke denken kritisch kan beoordelen. Men kan ook zeggen: het eigen denken bij het oplossen van een probleem moet vervolgens tot objekt van denken op een hoger plan gemaakt worden. Loopt men vast bij het oplossen van een probleem, dan moet men zijn eigen oplossingsgedrag gaan onderzoeken op andere mogelijkheden. Het is duidelijk dat vragen als: 'Hoe weet je dat?', 'Waarom heb je dat zo gedaan?', 'Kon je het ook anders doen?' de funktie hebben de leerling te stimuleren over zijn oplossingsgedrag na te denken, d.w.z. een Objektivierungsakt te verrichten. Het onder woorden proberen te brengen van datgene waarmee je bezig bent en de wijze waarop je ermee bezig bent, kan een uitstekende remedie zijn tegen Einstellungen. Echter niet de enig mogelijke remedie, zoals het in de vorige twee artikelen beschreven onderzoek heeft laten zien.

9 Tenslotte

In deze serie artikelen is het verschijnsel setvorming van verschillende kanten belicht. Ik zou willen afsluiten met een paar behartenswaardige opmerkingen van Van Hiele (1973).

> Het advies om leerlingen zoveel mogelijk oplossingsmethoden te leren voert tot verkwisting van denkarbeid. De oplossingsmethoden vertonen namelijk een eigen struktuur en het leren doorzien van deze struktuur is heel wat effektiever dan het aanleren van de oplossingsmethoden stuk voor stuk (p. 24).

Dit heeft alles te maken met wat er gebeurt als een leerling Einstellung of rigiditeit vertoont: Het inzicht in de struktuur van een algoritme en de kenmerken van de situatie waarin dit algoritme gebruikt kan worden, ontbreekt. Als in een vierkantsvergelijking $b = 0$ of $c = 0$, dan zal de leerling moeten begrijpen, *waarom* de abc-formule minder geschikt is dan een andere oplossingsmethode.
Over de vaardigheid in het gebruik van oplossingsmethoden merkt Van Hiele op:

> Daar vaardigheid slechts middel en niet zelfstandig doel is, kan een lang voortgezette oefening tot negatieve resultaten leiden. De handeling zal bij langdurig oefenen automatisch gaan verlopen en wel zo, dat daarbij het inzicht in de handeling verloren gaat. Men sluit dan de weg af om tot een hoger inzicht te komen, omdat daarvoor het begrijpen van de eigen handeling noodzakelijk is (p. 37).

Wat dit aangaat moet men echter vrezen dat er momenteel een bedenkelijke ontwikkeling plaats vindt in bepaalde hoeken van het wiskundeonderwijs. De roep om training en drill wordt weer regelmatig gehoord. En beloond, getuige de opgang van de 'wiskunde-opgavenbundels voor het hele voortgezet onderwijs'. Twee citaten uit Informatief (8, nr. 1, september 1979) illustreren de opvattingen waarvanuit dit gebeurt.

> Vooral door doen en weer doen en nog eens doen maken leerlingen zich immers nieuwe leerstof eigen. De voortdurende training in het oplossen van vraagstukken leidt ertoe, dat de leerling (terecht) het gevoel krijgt de desbetreffende stof te beheersen.

En:

> Goede opgavenbundels bieden een doorgaans noodzakelijke aanvulling op de gebruikte wiskundemethode. Ze verhogen daarmee de flexibiliteit van het wiskundeonderwijs, doordat ze het de docent gemakkelijker maken het onderwijs aan te passen aan de verschillen die er nu eenmaal tussen de leerlingen bestaan.

De flexibiliteit van het wiskundeonderwijs! Maar hoe zit het met *de flexibiliteit van het leerresultaat*? Moeten we dan per se weer terug naar de goeie, ouwe tijd? Met als enig verschil dat de vlugge leerlingen wat minder, de langzame leerlingen wat meer getraind en gedrild worden? Of, zoals Luchins en Luchins (1950) al zeiden: 'Our schools may be concentrating so much on having the child master the habits, that the habits are mastering the child'?
Ik hoop dat er andere doelstellingen voor het wiskundeonderwijs zullen worden gekozen.

Literatuur (zie ook: Van 't Riet, 1979)

Dormolen, J. van, *Didactiek van de wiskunde*, Oosthoek, Utrecht, 1974.
Eliawa, N. A., *Die Denktätigkeit und die Einstellung*. In: Neumann, H., (Red.), *Untersuchungen des Denkens in der sovjetischen Psychologie, Volk und Wissen*, Berlijn, 1967.
Getal en Ruimte deel 2V1, 3e druk, Tjeenk Willink/Noorduijn, Culemborg, 1973.
Getal en Ruimte deel 2V2, 3e druk, Tjeenk Willink/Noorduijn, Culemborg, 1973.
Getal en Ruimte deel 3V, 3e druk, Tjeenk Willink/Noorduijn, Culemborg, 1974.
Hiele, P. M. van, *Begrip en inzicht*, Muusses, Purmerend, 1973.
Informatief 8, nr. 1, Wolters-Noordhoff, Groningen, september 1979.
Lepoeter, P. E., *Gids voor de nieuwe wiskunde deel IIIA*, Meulenhoff Educatief, Amsterdam, 1974.
Lepoeter, P. E., *Gids voor de nieuwe wiskunde deel IIIB*, Meulenhoff Educatief, Amsterdam, 1975.
Moderne Wiskunde deel 3hv, 3e druk, Wolters-Noordhoff, Groningen, z.j.
Moderne Wiskunde deel 4hv, 3e druk, Wolters-Noordhoff, Groningen, z.j.
Parreren, C. F. van, *Leren op school*, 9e druk, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972.
Riet, S. P. van 't, *Setvorming en wiskundeonderwijs, I Einstellung en rigiditeit bij het oplossen van wiskundige vraagstukken*, Euclides 1979, 55, p. 41.
Riet, S. P. van 't, *Setvorming en wiskundeonderwijs, II De aard van de leerervaring*, Euclides 1980, 55, p. 308.
Riet, S. P. van 't, Leeuw, L. de, *Setvorming en wiskundeonderwijs, III Het voortzetten van getallenrijen met behulp van algoritmen; een onderzoek*, Euclides 1980 a, 56, p. 22.
Riet, S. P. van 't, Leeuw, L. de, *Setvorming en wiskundeonderwijs, IV Het vermenigvuldigen van wortelgetallen; eenvoudige algoritmen*, Euclides 1980 b, 56, p. 95.
Sigma deel 2hv, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1974.
Sigma deel 3*v*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1975.
Sigma deel 4/5h, Vectormeetkunde en statistiek, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1977.
Van A tot Z deel HV-3b, 2e druk, Muusses, Purmerend, 1974.